MÓDULO DIDÁCTICO DE MATEMÁTICAS

TRIGONOMETRÍA

agosto 2020

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE PUERTO RICO

Página web: https://de.pr.gov/ Twitter: @educacionpr

CONTENIDO

LISTA DE COLABORADORES

Profa. Isamalia Muñiz Nieves

Escuela Juan J. Osuna

Caguas II

ORE de Caguas

CARTA PARA EL ESTUDIANTE, LAS FAMILIAS Y MAESTROS

Estimado estudiante:

Este módulo didáctico es un documento que favorece tu proceso de aprendizaje. Además, permite que aprendas en forma más efectiva e independiente, es decir, sin la necesidad de que dependas de la clase presencial o a distancia en todo momento. Del mismo modo, contiene todos los elementos necesarios para el aprendizaje de los conceptos claves y las destrezas de la clase de Trigonometría, sin el apoyo constante de tu maestro. Su contenido ha sido elaborado por maestros, facilitadores docentes y directores de los programas académicos del Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) para apoyar tu desarrollo académico e integral en estos tiempos extraordinarios en que vivimos.

Te invito a que inicies y completes este módulo didáctico siguiendo el calendario de progreso establecido por semana. En él, podrás repasar conocimientos, refinar habilidades y aprender cosas nuevas sobre la clase de Trigonometría por medio de definiciones, ejemplos, lecturas, ejercicios de práctica y de evaluación. Además, te sugiere recursos disponibles en la internet, para que amplíes tu aprendizaje. Recuerda que esta experiencia de aprendizaje es fundamental en tu desarrollo académico y personal, así que comienza ya.

Estimadas familias:

El Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) comprometido con la educación de nuestros estudiantes, ha diseñado este módulo didáctico con la colaboración de: maestros, facilitadores docentes y directores de los programas académicos. Su propósito es proveer el contenido académico de la materia de Trigonometría para las primeras diez semanas del nuevo año escolar. Además, para desarrollar, reforzar y evaluar el dominio de conceptos y destrezas claves. Esta es una de las alternativas que promueve el DEPR para desarrollar los conocimientos de nuestros estudiantes, tus hijos, para así mejorar el aprovechamiento académico de estos.

Está probado que cuando las familias se involucran en la educación de sus hijos mejoran los resultados de su aprendizaje. Por esto, te invitamos a que apoyes el desarrollo académico e integral de tus hijos utilizando este módulo para apoyar su aprendizaje. Es fundamental que tu hijo avance en este módulo siguiendo el calendario de progreso establecido por semana.

El personal del DEPR reconoce que estarán realmente ansiosos ante las nuevas modalidades de enseñanza y que desean que sus hijos lo hagan muy bien. Le solicitamos a las familias que brinden una colaboración directa y activa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de sus hijos. En estos tiempos extraordinarios en que vivimos, les recordamos que es importante que desarrolles la confianza, el sentido de logro y la independencia de tu hijo al realizar las tareas escolares. No olvides que las necesidades educativas de nuestros niños y jóvenes es responsabilidad de todos.

Estimados maestros:

El Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) comprometido con la educación de nuestros estudiantes, ha diseñado este módulo didáctico con la colaboración de: maestros, facilitadores docentes y directores de los programas académicos. Este constituye un recurso útil y necesario para promover un proceso de enseñanza y aprendizaje innovador que permita favorecer el desarrollo holístico e integral de nuestros estudiantes al máximo de sus capacidades. Además, es una de las alternativas que se proveen para desarrollar los conocimientos claves en los estudiantes del DEPR; ante las situaciones de emergencia por fuerza mayor que enfrenta nuestro país.

El propósito del módulo es proveer el contenido de la materia de Trigonometría para las primeras diez semanas del nuevo año escolar. Es una herramienta de trabajo que les ayudará a desarrollar conceptos y destrezas en los estudiantes para mejorar su aprovechamiento académico. Al seleccionar esta alternativa de enseñanza, deberás velar que los estudiantes avancen en el módulo siguiendo el calendario de progreso establecido por semana. Es importante promover el desarrollo pleno de estos, proveyéndole herramientas que puedan apoyar su aprendizaje. Por lo que, deben diversificar los ofrecimientos con alternativas creativas de aprendizaje y evaluación de tu propia creación para reducir de manera significativa las brechas en el aprovechamiento académico.

El personal del DEPR espera que este módulo les pueda ayudar a lograr que los estudiantes progresen significativamente en su aprovechamiento académico. Esperamos que esta iniciativa les pueda ayudar a desarrollar al máximo las capacidades de nuestros estudiantes.

CALENDARIO DE LECCIONES SUGERIDO					
SEMANAS	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
Unidad I: Los ángulos y sus medidas					
1	Lección 1.1	Lección 1.1 A. ¿Qué vamos entendiendo?	Lección 1.1 B. ¿Qué vamos entendiendo?	Tarea de Desempeño 11.1- Una Mente Matemática	Continuación Tarea de Desempeño 11.1- Una Mente Matemática
2	Lección 1.1	Lección 1.1 Ángulos Ejercicios para calificar	Lección 1.2 Radianes y Grados C. ¿Qué vamos entendiendo?	Lección 1.2 D. ¿Qué vamos entendiendo?	Lección 1.2 Radianes y Grados Ejercicios para calificar
3	Lección 1.2 Practicando para las metas	Lección 1.3 Longitud de arcos y sector circular	Lección 1.3	Repaso	Prueba Unidad I: Los ángulos y sus medidas
UNIDAD II: Trigonometría en el triángulo rectángulo					
4	Lección 2.1 E. ¿Qué vamos entendiendo?	Lección 2.1 Trigonometría en el triángulo rectángulo Ejercicios para calificar	Lección 2.1	Lección 2.1	Tarea de Desempeño 11.2- Geometría Hopewell
5	Tarea de Desempeño 11.2- Geometría Hopewell Lección	Lección 2.1 F. ¿Qué vamos entendiendo? Practicando para las metas…	Tarea de Desempeño 11.2- Las Velas	Tarea de Desempeño 11.2- Las Velas	Repasar Lecciones 2.1
6	Repasar Lecciones 2.1	Lección 2.2 Triángulos especiales y el círculo unitario.	Lección 2.2	Lección 2.2	Lección 2.2 Triángulos Especiales Ejercicios para calificar

CALENDARIO DE LECCIONES SUGERIDO					
SEMANAS	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
7	Lección 2.2 Triángulos Especiales Ejercicios para calificar	Lección 2.2	Lección 2.2	Lección 2.2	Lección 2.2
8	Lección 2.2	Lección 2.2	Lección 2.2	Lección 2.2	Lección 2.2
9	Tarea de Desempeño 11.2- Ángulo del Sol	Tarea de Desempeño 11.2- Ángulo del Sol	Tarea de Desempeño 11.2- Ángulo del Sol	Repaso Lección 2.1	Repaso Lección 2.2
10	Repaso General	Prueba Unidad II: Trigonometría del triángulo rectángulo		Clarificación dudas Unidad I	Clarificación dudas Unidad II


Unidad I
Los ángulos y sus
medidas

Unidad I:	**Los ángulos y sus medidas**
Lección 1.1 Lección 1.2 Lección 1.3	**Ángulos** **Radianes y Grados** **Longitud de Arcos**
Objetivos de aprendizaje:	Al finalizar las lecciones podremos: ✓ Reconocer la diferencia entre los ángulos según su medida. ✓ Identificar ángulos en posición estándar y asociar su medida con la rotación del lado terminal (ángulos positivos y negativos) ✓ Reconocer la equivalencia entre radianes y grados. ✓ Calcular la medida de ángulos en grados y radianes. ✓ Hallar la longitud del arco intersecado por un ángulo. ✓ Definir la medida del ángulo en radianes como la constante de proporcionalidad. ✓ Aplicar la fórmula para hallar área de un sector circular.
Expectativas e Indicadores:	**2.0 Razona cuantitativamente y usa unidades para resolver problemas.** ES.N.2.1 Define cantidades adecuadas con el fin de hacer modelos descriptivos. ES.N.2.2 Escoge el grado de precisión adecuado a las restricciones de medición al reportar cantidades. **28.0 Amplía el dominio de funciones trigonométricas al utilizar el círculo unitario.** ES.F.28.1 Reconoce que la medida de un ángulo en radianes es igual a la longitud del arco que subtiende ese ángulo sobre el círculo unitario y utiliza este argumento para la solución de problemas. **34.0 Halla longitudes de arco y áreas de sectores circulares.** ES.G.34.1 Al usar semejanza, encuentra el hecho de que la longitud del arco intersecado por un ángulo es proporcional al ángulo y define la medida del ángulo en radianes como la constante de proporcionalidad; aplica la fórmula para hallar área de un sector circular.

Conceptos de la unidad:

ángulo
ángulos suplementarios
ángulos coplementarios
rotación positiva
rotación negativa
ángulo en posición estándar
ángulo de referencia
ángulo cuadrantal
ángulo agudo
grados
radianes
ángulos coterminales
círculo unitario
arco
radio
radián
diámetro
sector circular
circunferencia

Lección 1.1 Ángulos

ILUSTRACION 1 Identificando ángulos

¿Qué es un ángulo?

A diario podemos notar la formación de ángulos en diferentes situaciones y objetos.

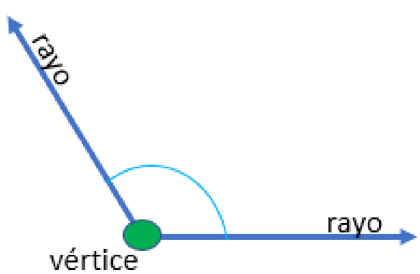
¿Dónde podemos identificar ángulos en las imágenes anteriores?

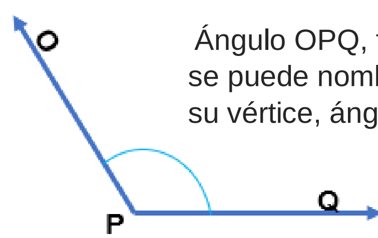
-Hasta al pegarle a un balón se forma un ángulo.

Identifiquemos lugares dónde se forman ángulos en nuestros hogares.

-ventanas, paredes, abanicos, mesas, sillas…

Ángulo – Un ángulo está formado por dos rayos con un vértice en común.





Ángulo OPQ, también se puede nombrar por su vértice, ángulo P.

ILUSTRACION 2 Definición de Ángulo

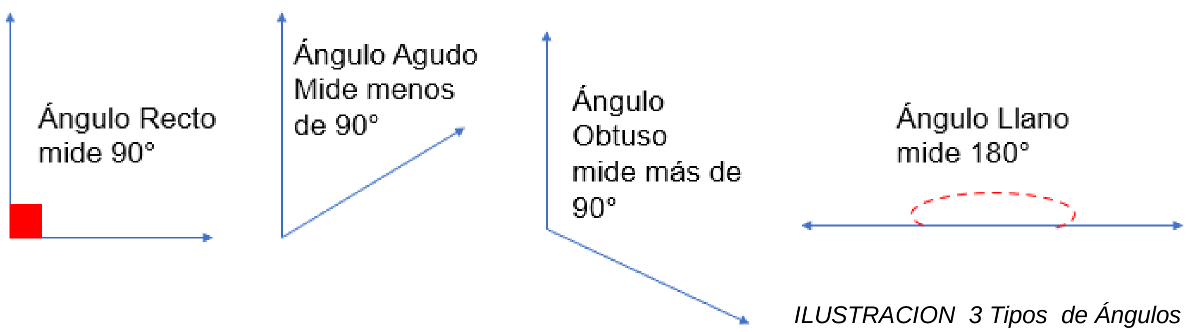
También utilizaremos algunas letras griegas (minúsculas) para identificar ángulos.

Ejemplos:

Letra	Símbolo
alfa	**α**
beta	**β**
gamma	**γ**
theta	**θ**
sigma	**σ**

Tipos de ángulos

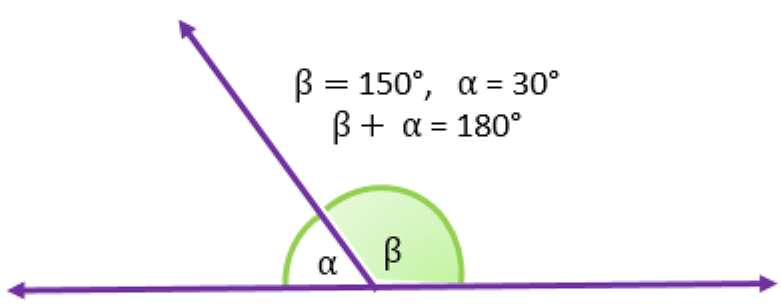
En años anteriores, habíamos aprendido que los ángulos se clasifican según sus medidas. Repasemos las clasificaciones de los ángulos según sus medidas:



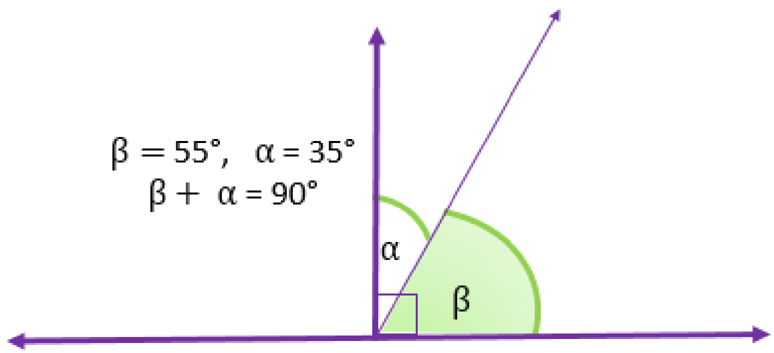
ILUSTRACION 3 Tipos de Ángulos

Ángulos suplementarios-

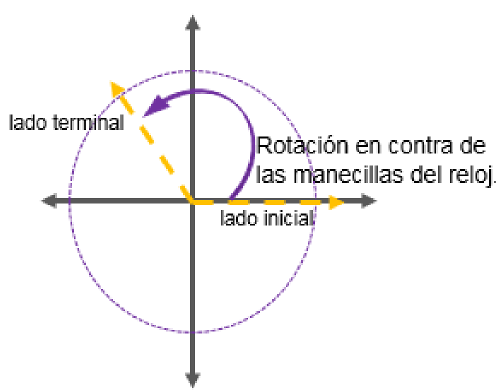
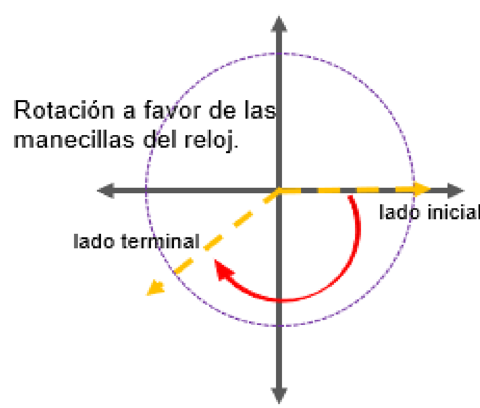
Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas = 180 grados.

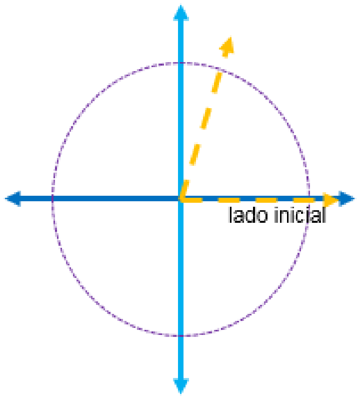
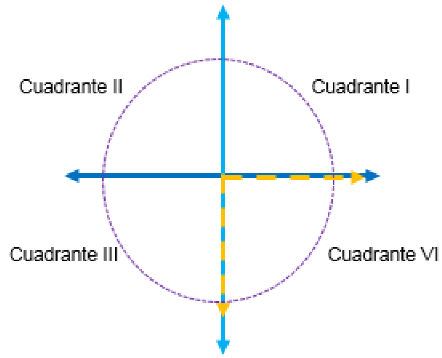


Ángulos complementarios- Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas= 90 grados.

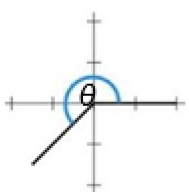


Ahora, además de clasificar los ángulos por sus medidas también aprenderemos a identificar los ángulos por sus **rotaciones** ya que la medida de un ángulo es la rotación de uno de sus rayos alrededor del vértice.

Rotación Positiva	**Rotación Negativa**
	 *ILUSTRACION 4 Rotaciones*

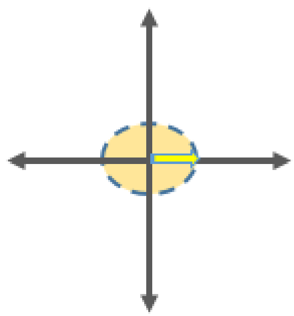
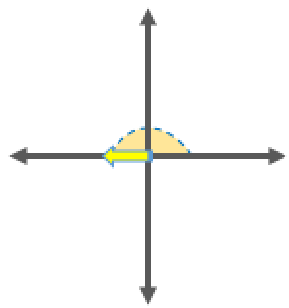
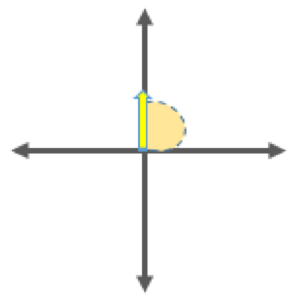
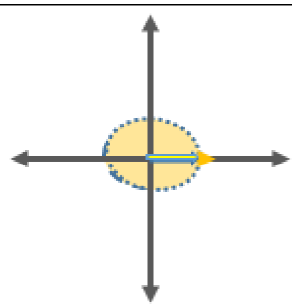
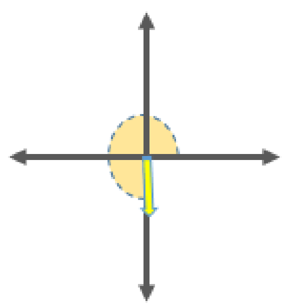
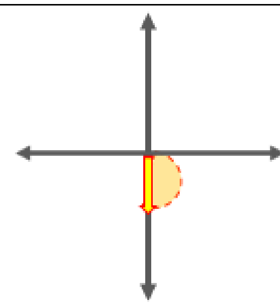
Ángulo en Posición Estándar o normal- Un ángulo en posición estándar tiene su lado inicial sobre el eje de x positivo y su vértice en el origen.	**Ángulo Cuadrantal –** Un ángulo cuadrantal tiene su lado inicial en el eje x positivo y su lado terminal sobre alguno de los cuadrantes del plano cartesiano.
	

ILUSTRACION 5 Ángulo en posición normal / Cuadrantal

A. ¿Qué vamos entendiendo? Ejercicios de Práctica	
1. Un ángulo tiene una rotación es negativa si va en contra de las manecillas del reloj.	a) Cierto b) Falso
2. El siguiente diagrama muestra una rotación **positiva** de un ángulo **alpha** con un lado terminal en el segundo (**II**) cuadrante. 	a) Cierto b) Falso

Medidas de los ángulos en grados (°)

Para medir ángulos podemos utilizar dos unidades de medidas, radianes y grados. A continuación en la representación 6 podemos ver algunos ejemplos de ángulos en grados:

Una rotación completa positiva 360°	$\frac{1}{2}$ de una rotación positiva 180°	$\frac{1}{4}$ de una rotación positiva 90°
		
Dos rotaciones completas y positivas 720°	$\frac{3}{4}$ de una rotación positiva 270°	$\frac{1}{4}$ de una rotación negativa 90°
		

ILUSTRACION. 6 Ejemplos Medidas de ángulos

Para pensar…

¿Cuántos grados medirá un ángulo que tiene 1 $\frac{1}{2}$ de rotación negativa?

Si una revolución o rotación negativa completa = - 360 grados y la $\frac{1}{2}$ de una revolución o rotación negativa = -180 grados, entonces …

Tarea de Desempeño 11.1- Una Mente Matemática

"Una mente matemática", una revista "online" está tratando de crear una sección acerca de las matemáticas en el mundo. En su próxima edición, quieren incluir ángulos. Te han contratado para escribir un artículo con imágenes que se podrán utilizar para ilustrar los ángulos. Les gustaría que las imágenes utilizadas incluyan todos los ángulos que conozcas. Después de leer el artículo, el público debe ser capaz de entender cada ángulo y como los ángulos se utilizan en nuestra vida diaria.

Imagen recuperada de https://www.pxfuel.com/es/search?q=blogs

1) Escribe una rápida introducción sobre los usos de los ángulos. ¿Por qué los estudiamos? ¿Dónde se utilizan? Esto debe "enganchar" a la gente a leer tu artículo.
2) Ahora empieza a encontrar imágenes. Asegúrate de citar donde encontraste cada imagen. Debes dar crédito a la persona que tomó la fotografía. También puedes tomar tus propias imágenes si dispones de un dispositivo para hacerlo.
3) Nombra cinco profesiones que utilizan ángulos. Describe cómo se utilizan ángulos y por qué son importantes para las profesiones que nombraste.
4) Piensa en todas las veces que se ven líneas y ángulos en la vida real. ¿Qué tipo de ángulos es lo que ves? En tu trabajo debes encontrar 6 diferentes ejemplos de ángulos. Asegúrate de mostrar todos los ángulos que hemos aprendido (un ángulo por imagen). También debes incluir la definición de ángulos, y cómo se clasifican. Indica la relación de ángulo si hay. Si no hay ninguna relación, explica por qué.
5) Busca una imagen que muestre:
    a) ángulos suplementarios. Asegúrate de dar la definición en tus propias palabras.
    b) Un ángulo bisecado y dar una definición en tus propias palabras.
    c) Un ángulo perpendicular y dar una definición en tus propias palabras
    d) Ángulo agudo, recto, obtuso y reflejo. Da la definición del ángulo en tus propias palabras.
6) Es sugerido que uses un transportador en 3 cuadros para demostrar ángulos de referencias de 30°, 45° y 60°.
7) Escribe un párrafo final corto para tu artículo.

Rúbrica

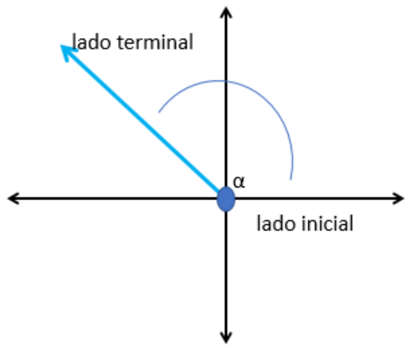
Unidad 11.1: Los Ángulos y sus Medidas Tarea de desempeño – Una Mente Matemática

Valor: 48 puntos

Categoría	*Excelente*	*Bueno*	*Aceptable*	*Requiere Mejorar*
Comprensión de ángulos (12)	Contesta con precisión, conocimiento y profundidad todas las preguntas planteadas sobre los ángulos. 12-10	Contesta con precisión, conocimiento y profundidad la mayoría de las preguntas planteadas sobre los ángulos. 9-7	Contesta con precisión, conocimiento y profundidad algunas de las preguntas planteadas sobre los ángulos. 6-4	No se contesta con precisión, conocimiento y profundidad todas las preguntas planteadas sobre los ángulos. 3-1
Comunicación (12)	Explica cabalmente, claro y correcto la relación de los ángulos, su utilidad en las profesiones. 12-10	En su mayoría explica cabalmente, claro y correcto la relación de los ángulos, su utilidad en las profesiones. 9-7	Explica cabalmente, claro y correcto algunas de las relaciones de los ángulos, su utilidad en las profesiones. 6-4	En muy pocas o ninguna explica cabalmente, claro y correcto la relación de los ángulos, su utilidad en las profesiones. 3-1
Relevancia con el tema (8)	Todas las imágenes están relacionadas con los ángulos y lo hacen más fácil de entender. 8-7	La mayoría de las imágenes están relacionadas con los ángulos y lo hacen más fácil de entender. 6-5	Algunas de las imágenes están relacionadas con los ángulos y en promedio lo hacen más fácil de entender. 4-3	Muy pocas o ninguna de las imágenes están relacionadas con los ángulos y dificulta entender. 2-1
Organización (4)	El trabajo es presentado en su totalidad de una manera ordenada, clara y organizada. 4	El trabajo es presentado casi en su totalidad de una manera ordenada, clara y organizada. 3	El trabajo es presentado mayormente de una manera ordenada, clara y organizada. 2	El trabajo es presentado de una manera descuidada y desorganizada. 1
Creatividad (4)	El trabajo es muy original y atractivo al lector. 4	El trabajo presenta rasgos de originalidad y es algo de atractivo al lector. 3	El trabajo no es muy original y es algo atractivo al lector. 2	El trabajo es muy común y poco atractivo al lector. 1
Puntualidad (4)	Se realiza la entrega en el día asignado. 4	Se realiza la entrega entre 1 a 2 días luego de la fecha asignada sin justificación escrita. 3	Se realiza la entrega entre 3 a 4 días luego de la fecha asignada sin justificación escrita. 2	Se realiza la entrega entre 5 ó más días luego de la fecha asignada sin justificación escrita. 1
Referencia (4)	Se hace referencia de manera confiable de todos los materiales utilizados. 4	Se hace referencia de manera confiable de gran parte de los materiales utilizados. 3	Se hace referencia de manera confiable de una parte de los materiales utilizados. 2	No se hace referencia de manera confiable de los materiales utilizados. 1

B. ¿Qué vamos entendiendo? Ejercicios de Práctica

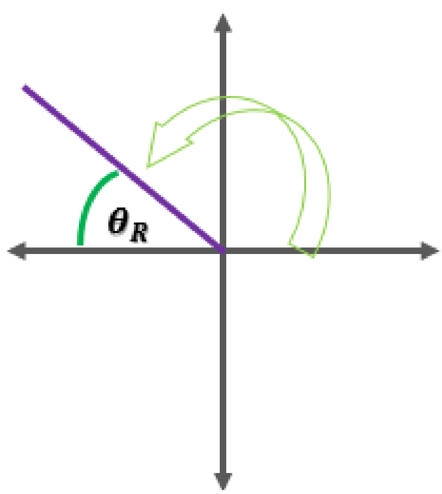
Observa la ilustración y selecciona la mejor opción para contestar las preguntas.



ILUSTRACION. 7 ¿Qué voy entendiendo?

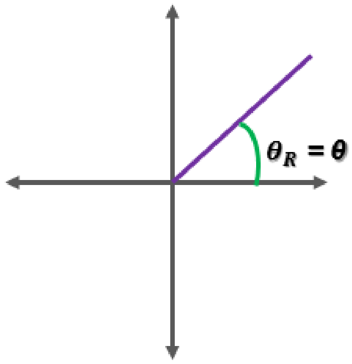
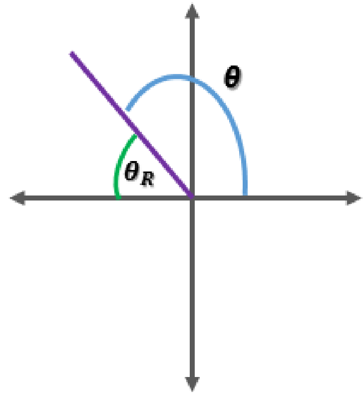
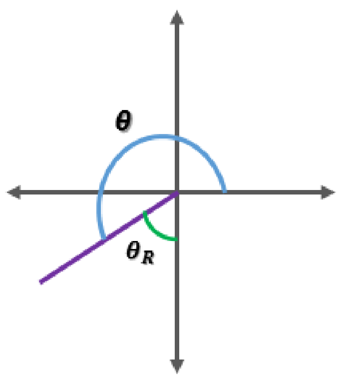
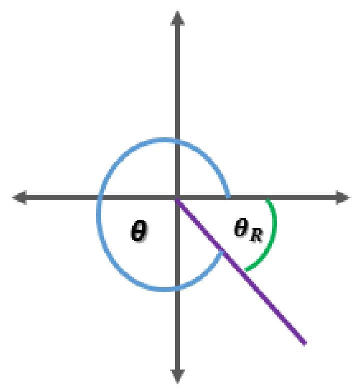
1. ¿ En cuál cuadrante está el lado terminal?	a) Cuadrante I b) Cuadrante II c) Cuadrante III d) Cuadrante IV
2. ¿Cuántos grados podemos estimar que mide el ángulo?.	a) 90° b) – 45° c) 100° d) 45°

Ángulo de Referencia - es un **ángulo agudo** positivo y es el ángulo más pequeño formado entre el lado terminal y el eje x.



ILUSTRACION. 8 Hallar Ángulo de Referencia

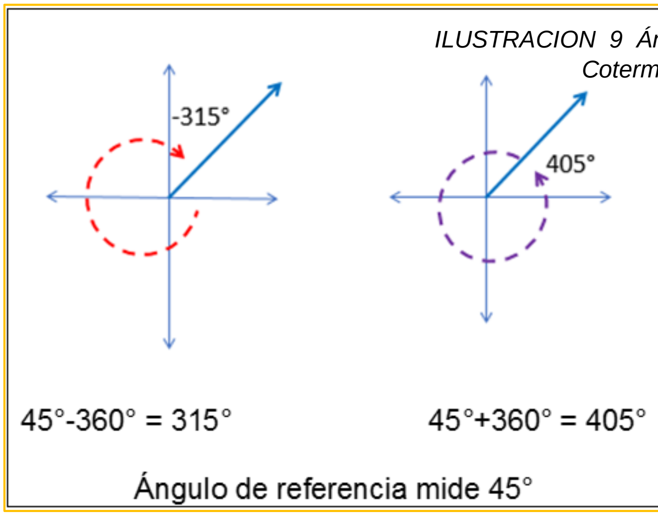
Para hallar la medida del **ángulo de referencia θ_R** se calcula a base de la posición del lado terminal ángulo dado en cualquiera de los cuatro cuadrantes.

	
CUADRANTE I (Q_1) $\boldsymbol{\theta_R}$ **= θ** **El ángulo de referencia es igual al ángulo dado.**	CUADRANTE II (Q_2) $\boldsymbol{\theta_R}$ **= 180° - θ** **El ángulo de referencia es igual a 180 grados menos el ángulo dado.**
	
CUADRANTE III (Q_3) $\boldsymbol{\theta_R}$ **= θ – 180°** **El ángulo de referencia es igual al ángulo dado menos 180 grados.**	CUADRANTE IV (Q_4) $\boldsymbol{\theta_R}$ **= 360°- θ** **El ángulo de referencia es igual a 360 grados menos el ángulo dado.**

Ejemplo: Completemos la siguiente tabla para determinar los ángulos de refencia para los ángulos dados (θ).

θ	Lado terminal	$\boldsymbol{\theta_R}$
45°	Q_1	
205°	Q_3	
280°:	Q_4	
Respuestas correctas: 45°, 25° y 80°		

Ángulos Coterminales – los ángulos en posición estándar o normal son coterminales si sus lados terminales coinciden.



ILUSTRACION 9 Ángulos Coterminales

Para hallar ángulos coterminales positivos, sumamos 360° o por un múltiplo de 360°. Para hallar ángulos coterminales negativos, restamos 360° o por un múltiplo de 360°. Ejemplo:

Hallar un ángulo coterminal positivo y un ángulo coterminal negativo con un ángulo de 55°.

$55° - 360° = -305°$
$55° + 360° = 415°$

Un ángulo de –305° y un ángulo de 415° son coterminales con un ángulo de 55°.

Clave de respuestas:

Ejercicio A: Página 14

Respuestas correctas:

*1. Falso, una rotación negativa es **a favor** de las manecillas del reloj.*

*2. Falso, el diagrama muestra una rotación **positiva** del ángulo **theta** con el lado terminal en el tercer (**III**) cuadrante.*

Ejercicio B: Página 18

Respuestas correctas:

1. b, segundo cuadrante

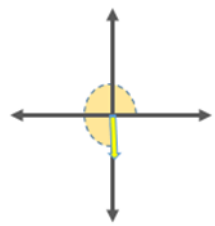
2. d, positivo 45 grados

Lección 1.1 Ángulos Ejercicios para calificar

Puntuación sugerida: 15 puntos

Lee cuidadosamente las preguntas y selecciona la opción correcta.

Observa la siguiente ilustración para contestar las preguntas 1 y 2.



1. Selecciona la aseveración que resulte cierta con relación a la ilustración.	a) Muestra un ángulo agudo b) Muestra una rotación negativa c) Muestra un ángulo cuadrantal d) Muestra un ángulo que mide 260°
2. ¿Cuántos grados podemos estimar que mide el ángulo sombreado?.	a) 90° b) 270° c) -270° d) -90°
3. Un ángulo θ mide 750° y es coterminal con…	a) Un ángulo cuya medida es 30° b) Un ángulo cuya medida es -270° c) Un ángulo cuya medida es 360° d) Un ángulo cuya medida es -30°
4. $\boldsymbol{\theta_R =}$ _____, si θ = 140°	a) 140° b) 40° c) -40° d) -270°

Favor de contestar todas las partes de la pregunta en el espacio provisto.

5. Halla dos ángulos coterminales para el ángulo de referencia
   A. 80°
   B. 260°

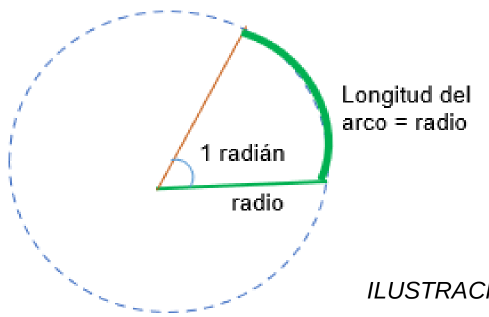
Rúbrica para evaluar ejercicios de práctica y pruebas.				
Puntuación por cada ejercicio.	3 puntos	2 puntos	1 punto	0 puntos
Criterios	Determina una ecuación o fórmula para trabajar el ejercicio o problema. Plantea y realiza los procesos. Contesta correctamente.	Contesta sin proceso que justifique su respuesta Contesta correctamente.	Plantea y realiza un proceso incompleto o erróneo para justificar su respuesta. No contesta correctamente.	No realizó el ejercicio.

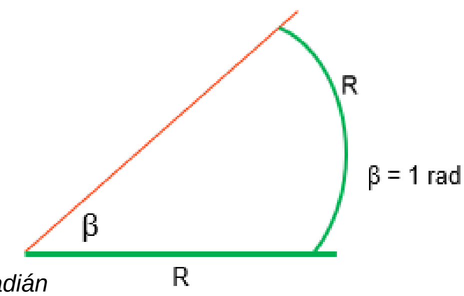
Lección 1.2 Radianes y Grados

Los radianes y los grados son unidades de medidas que se utilizan para medir ángulos. En la lección anterior hablamos de los grados (°). Ahora conoceremos lo que son los radianes.

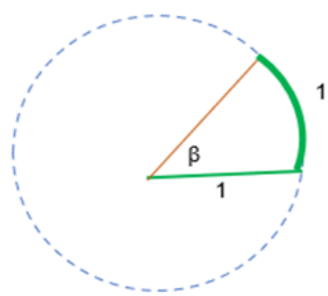
Radián- Un **radián** es la medida del ángulo central de una circunferencia cuando la longitud del arco mide lo mismo que el radio. El **radián** es el cociente (resultado de un división) entre la longitud del arco y el radio.

(Abreviatura de radián = rad)





ILUSTRACION 1 Radián



ILUSTRACION 2 Medida de ángulo β

Para pensar…

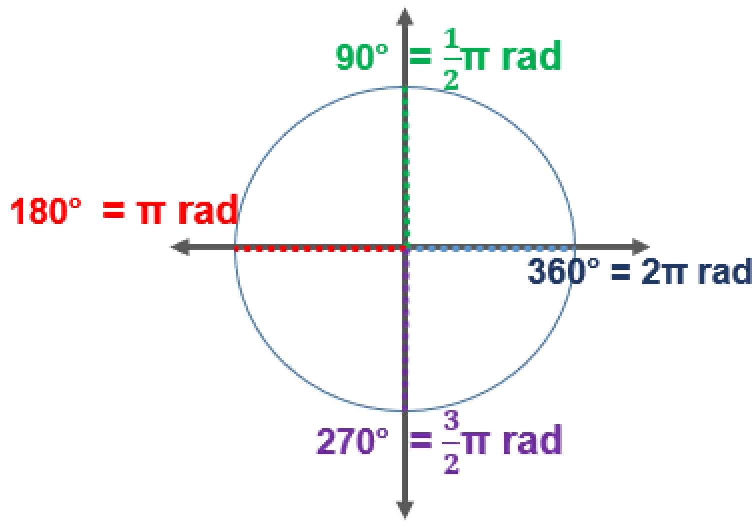
Observemos la ilustración 2. Si la medida en grados del ángulo β es aproximadamente 57.296° y la medida de un ángulo en radianes es igual a la longitud del arco que subtiende ese ángulo ¿Qué podemos concluir sobre la medida del mismo ángulo en radianes?

1 rad = $\left(\frac{180}{\pi}\right) \approx 57.296°$

Para entender un poco más sobre lo que es un radián, podemos acceder al siguiente video https://youtu.be/L5GNg9a_gSc (Matemáticas profe Alex, 2018)

Vamos a analizar la siguente Ilustración 3, notemos que existe una **relación entre los grados y los radianes** respecto a la circunferencia del círculo.

ILUSTRACION 3
Grados y Radianes



Debido a que 360 grados = 2π, podemos cambiar las unidades de medidas de grados a radianes y viceversa.

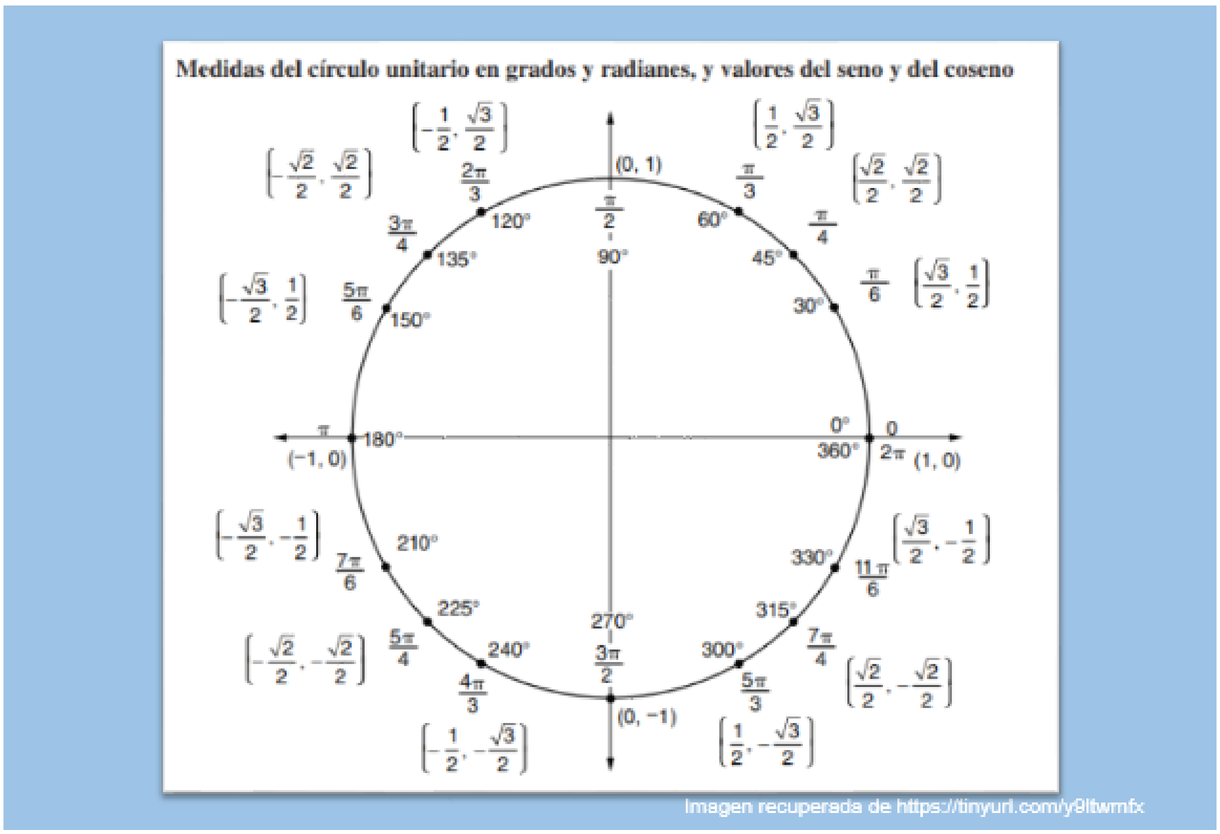
Para cambiar de grados a radianes	**Para cambiar de radianes a grados**
$45° \left(\frac{\pi}{180°}\right) = \left(\frac{45\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{4} rad$	$\frac{\pi}{4} rad \left(\frac{180°}{\pi}\right) = \left(\frac{180°}{4}\right) = 45°$
Cancelamos grados y simplificamos la fracción hasta su más simple expresión.	Cancelamos π y simplificamos la fracción hasta su más simple expresión.

C. ¿Qué vamos entendiendo?	Ejercicios de Práctica
1. El equivalente en radianes de un ángulo de 130° es $\frac{13\pi}{18}$.	a) Cierto b) Falso

Circulo Unitario-

El círculo unitario es un círculo de radio 1, centrado en el origen en el plano cartesiano.

ILUSTRACION 4 Círculo Unitario



En la ilustración 4 del Círculo Unitario, podemos observar la equivalencia entre los radianes y los grados. La medida de un ángulo en radianes es igual a la longitud del arco que subtiende ese ángulo sobre el círculo unitario. También podemos notar en el círculo unitario los valores de las coordenadas del coseno y seno, dos funciones trigonométricas que estaremos conociendo en la próxima unidad.

D. ¿Qué vamos entendiendo? Ejercicios de Práctica
1. Identifica en el círculo unitario las medidas de los ángulos 300°, 135° y 60° en radianes y determina en cual cuadrante (Q) se encuentran.

Lección 1.2 Radianes y Grados **Ejercicios para calificar** Puntuación sugerida: 30 puntos Halla el equivalente entre las unidades de medidas hasta su más simple expresión y demuestra el procedimiento.	
1. Cambia de grados a radianes $15°$	
2. Cambia de radianes a grados $\frac{5\pi}{6}$	
3. Cambia de grados a radianes $310°$	
4. Cambia de radianes a grados $\frac{2\pi}{3}$	
5. Cambia de radianes a grados $\frac{\pi}{2}$	
6. Cambia de radianes a grados $\frac{12\pi}{6}$	
7. Cambia de grados a radianes 540°	

Lección 1.2 Radianes y Grados Ejercicios para calificar Puntuación sugerida: 30 puntos Halla el equivalente entre las unidades de medidas hasta su más simple expresión y demuestra el procedimiento.	
8. Cambia de grados a radianes $240°$	
9. Cambia de radianes a grados $\frac{\pi}{10}$	
10. Cambia de grados a radianes 170°	

Rúbrica para evaluar ejercicios de práctica y pruebas.				
Puntuación por cada ejercicio.	3 puntos	2 puntos	1 punto	0 puntos
Criterios	Determina una ecuación o fórmula para trabajar el ejercicio o problema. Plantea y realiza los procesos. Contesta correctamente.	Contesta sin proceso que justifique su respuesta Contesta correctamente.	Plantea y realiza un proceso incompleto o erróneo para justificar su respuesta. No contesta correctamente.	No realizó el ejercicio.

Practicando para las metas…

¿A cuántos grados equivalen 0.1 radianes?

A 18 °

B 0.30°

C 512°

D **5.73**°

Si 1 rad = (180/π) ≈ 57.296°, entonces 0.1 radianes es aproximadamente 5.7296°

Clave de respuestas:

Ejercicio C: Pagina 25

1. *cierto, 130°*$\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{130\pi}{180} = \frac{13\pi}{18}$

Ejercicio D: Pagina 26

Respuesta correcta

1. 300° $=\frac{5\pi}{3}$,Q4   135° = $\frac{3\pi}{4}$,Q2   60°= $\frac{\pi}{3}$,Q1

Lección 1.3 Longitud de arcos y sector circular

Arco- Un arco es una parte de una circunferencia.

ILUSTRACION 5 Longitud de arco

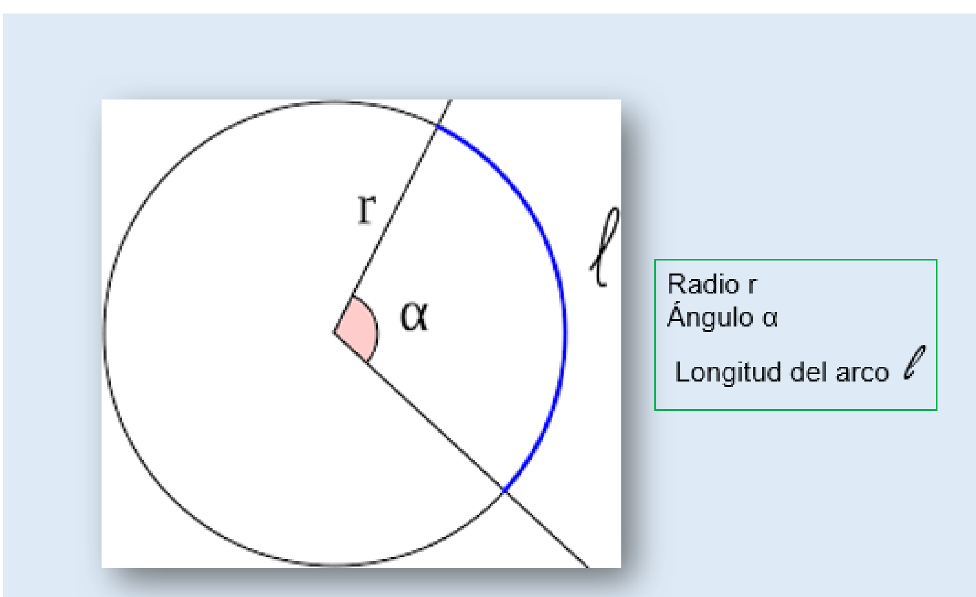



Imagen recuperada de https://tinyurl.com/ydcfuqs4

Para conocer la relación proporcional del radio y el ángulo central podemos acceder al siguiente video https://youtu.be/pa7RKOQGmiI (math2me, 2016)

Ahora vamos a hallar la longitud de un arco.

Estudiemos la fórmula para hallar la longitud de un arco:

Fórmula para calcular longitud de arco

$$\text{Longitud de arco} = \frac{\text{ángulo}}{360} \cdot d\pi$$

d = diámetro

$\pi \approx 3.14$

Imagen recuperada de https://tinyurl.com/y9ltwmfx

d= diámetro
d=2r (diámetro mide 2 veces el radio)
π (pi) (en ocasiones se sustituye por su valor aproximado de 3.14)

Imagen recuperada de **https://tinyurl.com/y7dud65m**

Ejemplo: Grados- Paso a paso

Hallemos la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 30° con un radio de 10m.

1. Notamos que 10m de radio = 20m de diámetro (d=2r)
2. Sustituimos los valores dados en la fórmula:

   L = $\frac{30°}{360°}(20\pi)$

3. Simplificamos la fracción = $\frac{1}{12}(20\pi)$
4. L = $\frac{20\pi}{12}$, simplificamos nuevamente
5. L = $\frac{5\pi}{3}$ **m**

Si sustituimos por el valor aproximado de π se puede expresar como:

Longitud de arco = $\frac{5\pi}{3}$ **m** = $\frac{5(3.14)}{3} = \frac{15.7}{3}$ **≈ 5.23 m**

La medida de un ángulo θ en radianes es el número de radios que caben dentro del arco que subtiende al ángulo θ y para hallar la longitud de arco en radianes aplicamos la siguiente fórmula:

Longitud de arco = ángulo por el radio

L = θr

Ejemplo: Radianes - Paso a paso

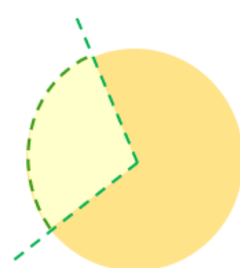
Hallemos la longitud del arco que subtiende un ángulo central de $\frac{3}{2}$ rad con un radio de 4m.

1. Sustituimos los valores dados en la fórmula:
   $L = \theta r$
   $L = \frac{3}{2}(4)$ se multiplican los numeradores
2. $L = \frac{12}{2}$ simplificamos la expresión
3. **$L = 6$ m**

Sector Circular

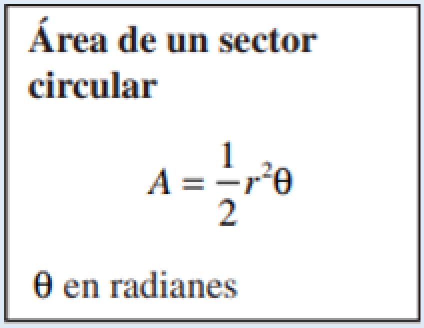
Antes de aprender a aplicar la fórmula para hallar el sector circular debemos conocer qué es un sector circular.

Sector circular - Es una región plana entre dos radios y su arco correspondiente.



ILUSTRACION 6 Sector circular

Formula para hallar el área de un sector circular

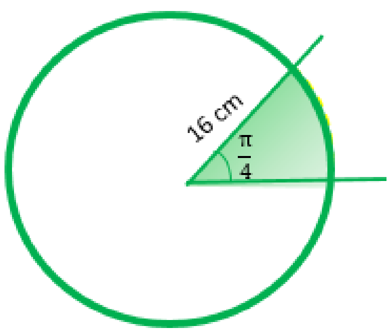


A = área
r = radio
r^2 = radio al cuadrado
θ en radianes

Imagen recuperada de https://tinyurl.com/y9ltwmfx

Ejemplo: Paso a paso

¿Cuánto mide el área del sector sombreado?



A= $\boldsymbol{\frac{1}{2}r^2\theta}$

1. Sustituimos los valores dados en la fórmula:

A= $\frac{1}{2}r^2\theta$
A= $\boldsymbol{\frac{1}{2}(16cm)^2(\frac{\pi}{4})}$

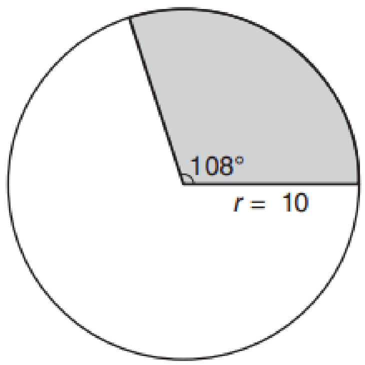
2. $\boldsymbol{(16cm)^2}$ **= 16cm x 16cm = 256**$\boldsymbol{cm^2}$ *Elevamos al cuadrado*
3. $\boldsymbol{\frac{1}{2}(256cm^2)}$ **= 128**$\boldsymbol{cm^2}$ *multiplicamos por un medio* ($\boldsymbol{\frac{1}{2}}$)
4. $\boldsymbol{128cm^2(\frac{\pi}{4})}$ **=** $\boldsymbol{\frac{128\pi cm^2}{4}}$ *multiplicamos por un cuarto pi* ($\frac{\pi}{4}$)
5. $\boldsymbol{A = 32\pi\ cm^2}$

Área del sector circular es 32$\boldsymbol{\pi cm^2}$

Si usamos 3.14 para sustituir π*, entonces el área del sector circular*
$= 32(3.14)\ cm^2$
$\mathbf{A = 100.48cm^2}$

Practicando para las metas…

Observa la siguiente figura.



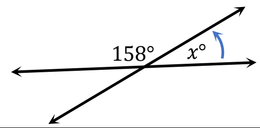
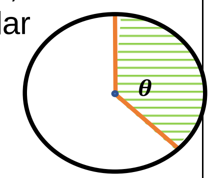
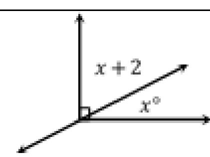
¿Cuánto mide el área del sector sombreado, redondeada a la décima más cercana? (Usa $\pi \approx 3.14$)

a) 196.56
b) **94.2**
c) 19.66
d) 9.42

Primero debemos cambiar el ángulo de grados a radianes.
Apliquemos la fórmula.
Usemos 3.14 para sustituir π

Prueba Unidad I: Los ángulos y sus medidas Valor sugerido 60 puntos

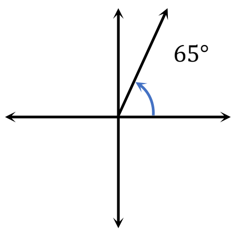
Demuestra el procedimiento para hallar tu respuesta.

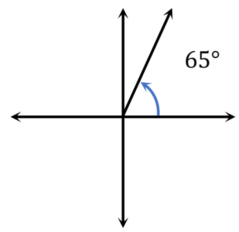
<table>
<tr><td>1) Halla el complemento de un ángulo de $37°$.</td><td></td></tr>
<tr><td>2) Determina el valor de la $\boldsymbol{x}$ y determina que tipo de ángulo es.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3) Halla el suplemento de un ángulo de $53°$.</td><td></td></tr>
<tr><td>4) Dada la siguiente figura, determina el área del sector circular
$\theta = 125°$
$r = 10m$

</td><td></td></tr>
<tr><td>5) Cambia de grados a radianes
a. $110°$
b. $300°$
c. $60°$</td><td></td></tr>
<tr><td>6) Dada la siguiente figura:
a. Determina el valor de $\boldsymbol{x}$.
b. ¿Cuál será el valor del ángulo mayor?</td><td>
</td></tr>
</table>

7) Construye un ángulo coterminal positivo y uno negativo para cada ángulo dado:

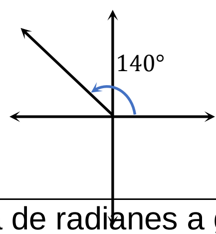
Coterminal positivo *Coterminal negativo*

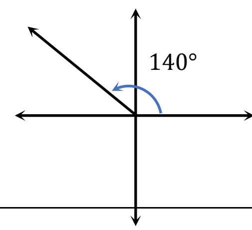
a.





b.





8) Cambia de radianes a grados

a. $\frac{3\pi}{12}$

b. $\frac{\pi}{3}$

c. $\frac{3\pi}{5}$

9) Determina la Longitud de Arco. Usa $\pi = 3.14$

a. d= 12pies $\theta = 87°$

b. r=14cm θ= 215°

c. d=19pul θ=$\frac{\pi}{6}$

10) Halla el Área del Sector Circular. Usa $\boldsymbol{\pi = 3.14}$

$r = 8m \quad \theta = 76°$

UNIDAD II

Trigonometría en el triángulo rectángulo

Unidad II:	**Trigonometría en el triángulo rectángulo**
Lección 2.1 Lección 2.2	Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Propiedades de los triángulos especiales.
Objetivos de aprendizaje:	Al finalizar las lecciones podremos: ✓ Reconocer las propiedades de un triángulo rectángulo. ✓ Usar las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras para resolver problemas. ✓ Explicar la relación de seno y coseno de sus ángulos complementarios. ✓ Utilizar el círculo unitario para poder hallar las medidas de ángulos y funciones trigonométricas. ✓ Utiliza triángulos especiales para determinar geométricamente las funciones trigonométricas.
Expectativas e Indicadores:	**33.0 Define razones trigonométricas y resuelve problemas con triángulos rectángulos.** ES.G.33.1 Reconoce que, por semejanza, las razones entre los lados de un triángulo rectángulo son una propiedad de los ángulos del triángulo, lo que lleva a la definición de razones trigonométricas para ángulos agudos. ES.G.33.2 Explica y usa la relación entre seno y coseno de ángulos complementarios. ES.G.33.3 Usa razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras para resolver triángulo rectángulos en problemas aplicados. **28.0 Amplía el dominio de funciones trigonométricas al utilizar el círculo unitario.** ES.F.28.1 Reconoce que la medida de un ángulo en radianes es igual a la longitud del arco que subtiende ese ángulo sobre el círculo unitario y utiliza este argumento para la solución de problemas. ES.F.28.2 Explica cómo el círculo unitario sobre un plano de coordenadas permite extender las funciones trigonométricas a todos los números reales, interpretados como medidas de los ángulos en radianes en el sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del círculo unitario. ES.F.28.3 Utiliza triángulos especiales para determinar geométricamente los valores seno, coseno, tangente de 0, π, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$ y sus múltiplos, y usa el círculo unitario para expresar los valores seno, coseno y tangente de x, π+ x, y 2π–x en términos de sus valores de x, en el que x es un número real cualquiera.

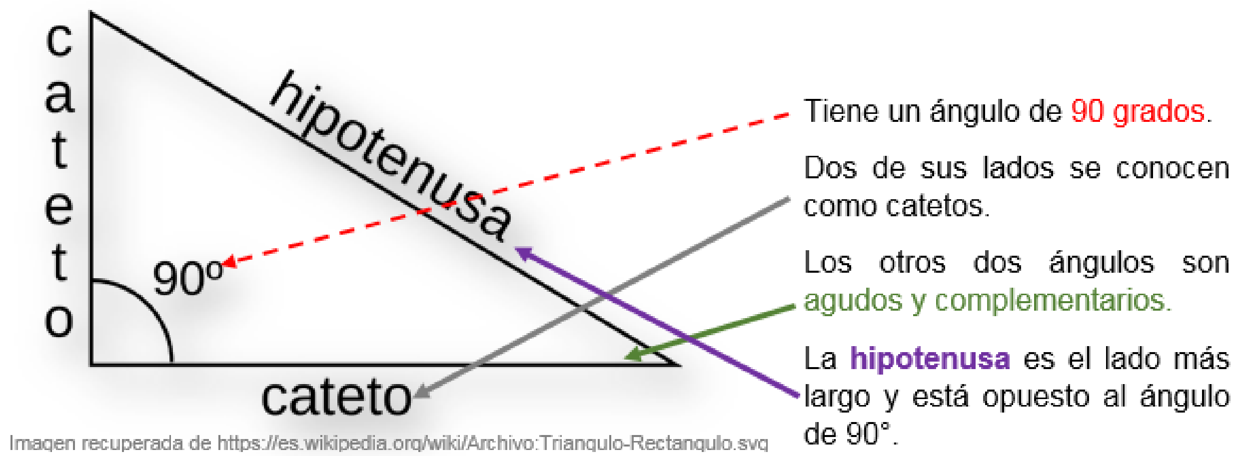
Conceptos de la unidad:

Triángulo rectángulo	**ángulo agudo**	**razón**
hipotenusa	**grados**	**variable**
catetos	**radianes**	**Triángulo isósceles**
Funciones Trigonométricas	**ángulos complementarios**	**Triángulo escaleno**
círculo unitario	**recíproco**	
Teorema de Pitágoras	**radio**	
opuesto	**semejante**	
adyacente	**Triángulos semejantes**	

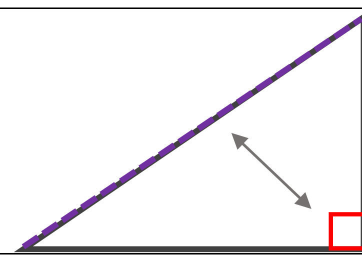
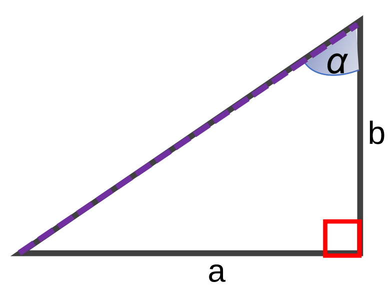
Lección 2.1 Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

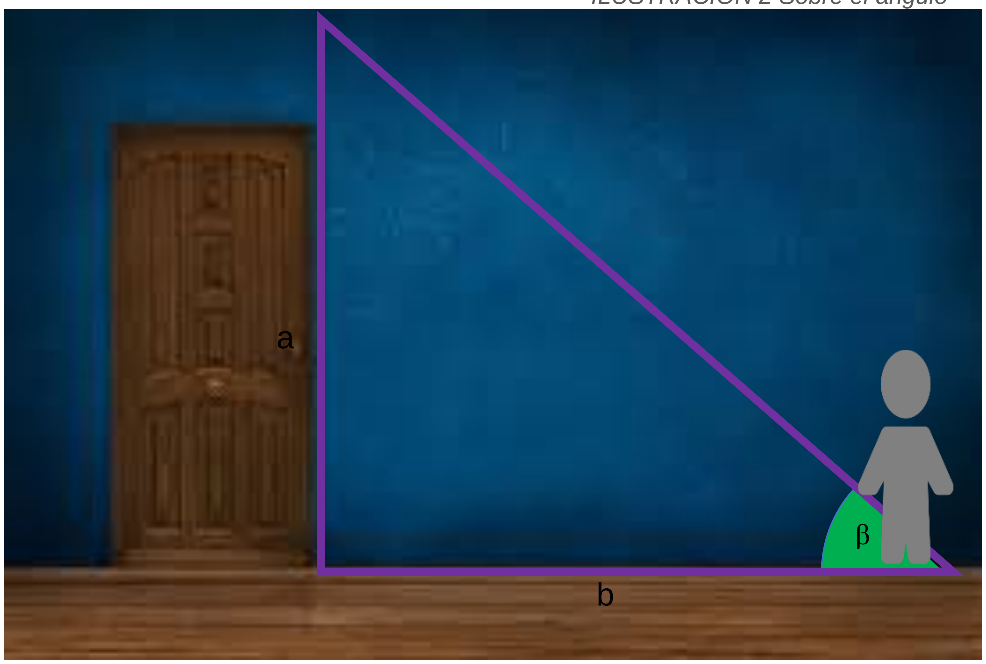
Triangulo Rectángulo - El triángulo rectángulo, también llamado triángulo recto, tiene un ángulo recto que mide 90 grados (°) y los dos ángulos restantes son **complementarios**.

ILUSTRACION 1 Triángulo recto



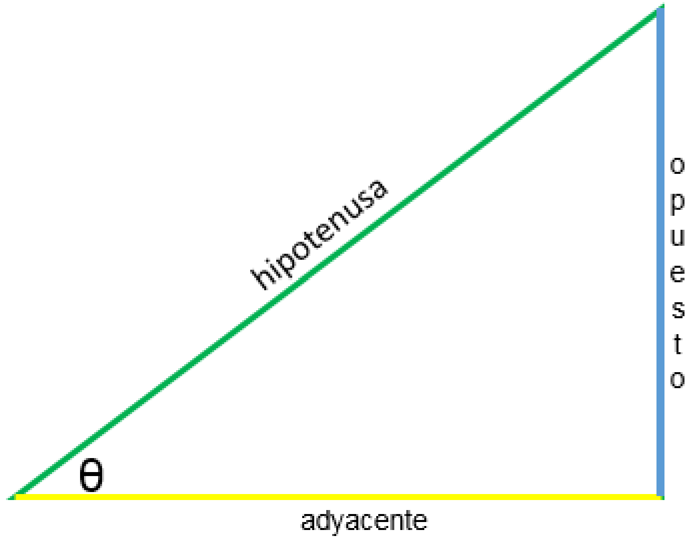
Relación entre los lados y los ángulos del triángulo rectángulo

Recordemos que la hipotenusa es el lado más largo y está opuesto al ángulo recto (90°).	
Los otros dos lados o catetos los podemos llamar opuesto y adyacente, pero sus nombres van a depender de su relación con respecto a un ángulo. Ejemplo: El lado a es ***opuesto*** al ángulo ***α*** (alfa). El lado b es ***adyacente*** al ángulo ***α*** (alfa).	

E. ¿Qué vamos entendiendo? Ejercicios de Práctica
Imaginemos que estamos parados sobre el ángulo β, como se muestra en la ilustración 2. a) La puerta (a) representa el lado ____________ a nosotros. b) El piso (b) representa el lado _____________ a nosotros. *ILUSTRACIÓN 2 Sobre el ángulo* 

Razones Trigonométricas- Las razones trigonométricas establecen la relación entre los lados de un triángulo rectángulo respecto a un ángulo. Cualquier triángulo rectángulo es **semejante** a otro triángulo rectángulo, por lo tanto las razones entre los lados de un triángulo rectángulo son una propiedad de los ángulos agudos del triángulo.

Veamos la siguiente *ILUSTRACION 3* de un triángulo rectángulo. Identifiquemos su ángulo θ y determinaremos las 6 funciones trigonométricas respecto al ángulo.



seno

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

cosecante

$$\csc \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$$

coseno

$$\cos \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

secante

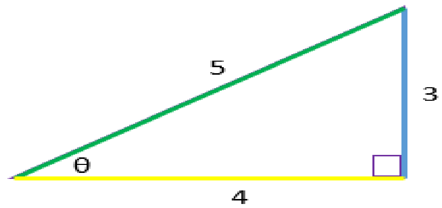
$$\sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$

tangente

$$\tan \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

cotangente

$$\cot \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$



Ahora determinaremos las 6 funciones trigonométricas del ángulo θ dadas las medidas de los lados.

seno

$$\text{sen } \theta = \frac{3}{5}$$

cosecante

$$\csc \theta = \frac{5}{3}$$

coseno

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

secante

$$\sec \theta = \frac{5}{4}$$

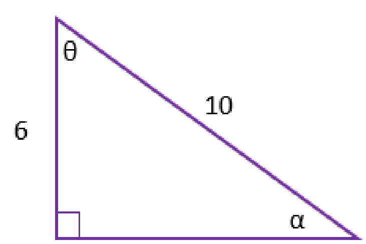
tangente

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

cotangente

$$\cot \theta = \frac{4}{3}$$

Si nos falta el valor de uno de los catetos o de la hipotenusa, entonces usamos una **variable** para expresar el valor desconocido.



$$\text{sen } \theta = \frac{x}{10}$$

$$\csc \theta = \frac{10}{x}$$

Clave de respuestas:

Ejercicio E: Pagina 39

Respuesta correcta

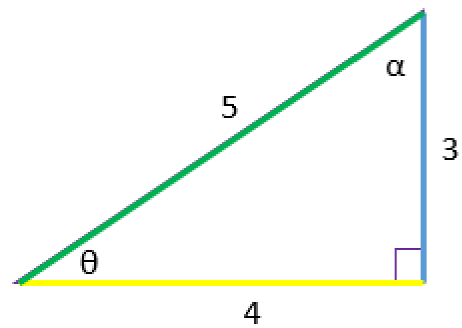
a) opuesto

b) adyacente

Lección 2.1 Trigonometría en el triángulo rectángulo Ejercicios para calificar

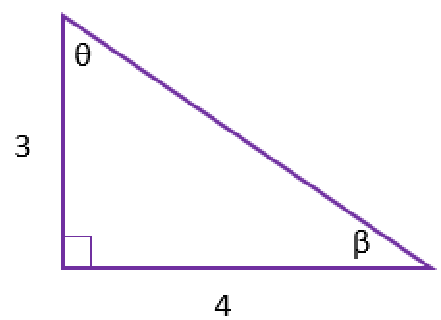
Valor sugerido: 36 puntos

Determina las 6 funciones trigonométricas respecto al ángulo α.



sen α =	csc α =
cos α =	sec α =
tan α =	cot α =

Determina las 6 funciones trigonométricas respecto al ángulo β.



sen β =	csc β =
cos β =	sec β =
tan β =	cot β =

Rubrica Sugerida				
Puntuación por cada ejercicio.	3 puntos	2 puntos	1 punto	0 puntos
Criterios	Determina una ecuación o fórmula para trabajar el ejercicio o problema. Plantea y realiza los procesos. Contesta correctamente.	Contesta sin proceso que justifique su respuesta Contesta correctamente.	Plantea y realiza un proceso incompleto o erróneo para justificar su respuesta. No contesta correctamente.	No realizó el ejercicio.

SohCahToa – es un acrónimo que podemos utilizar para recordar la relación entre los los lados de un triángulo.

Soh **C**ah **T**oa

Sen (seno) = $\frac{opuesto}{hipotenusa}$ Cos (coseno) = $\frac{adyacente}{hipotenusa}$ Tan (tangente) = $\frac{opuesto}{adyacente}$

La razón tangente también se puede expresar como tan = $\frac{sen}{cos}$.

Las razones cosecante, secante y cotangente son **recíprocas** a seno, coseno y tangente.

Csc (cosecante) = $\frac{hipotenusa}{opuesto}$ Sec (secante) = $\frac{hipotenusa}{adyacente}$ Cot (cotangente) = $\frac{adyacente}{opuesto}$ y

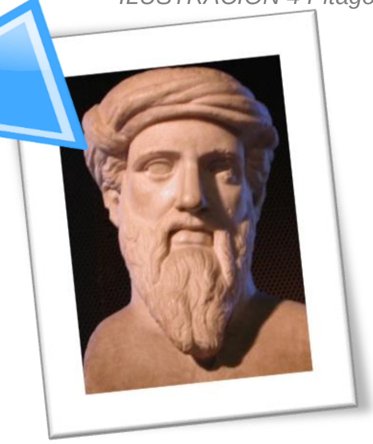
también se pueden expresar como:

$$\csc = \frac{1}{sen} \quad \sec = \frac{1}{cos} \quad \cot = \frac{1}{tan} = \frac{cos}{sen}$$

Teorema de Pitágoras-

Usamos el Teorema de Pitágoras para hallar la medida de un cateto o lado en el triángulo rectángulo.

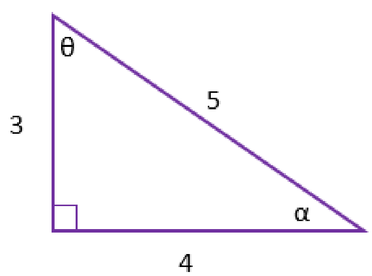
ILUSTRACIÓN 4 Pitágoras



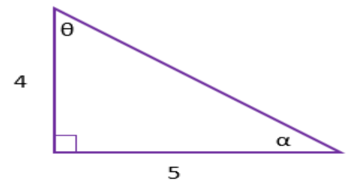
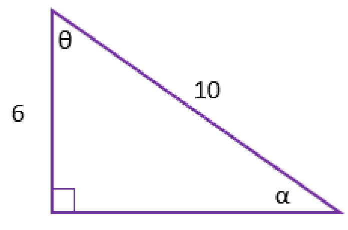
El teorema de ______________ establece que la suma de los catetos al cuadrado de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de su hipotenusa.

Imagen recuperada de https://www.flickr.com/photos/61429029@N05/5904436128

Comprobando el teorema

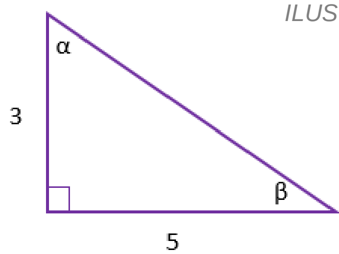
	$a^2 + b^2 = c^2$ $(\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2 = (\text{hipotenusa})^2$	$3^2 + 4^2 = 5^2$ $9 + 16 = 25$ $25 = 25$

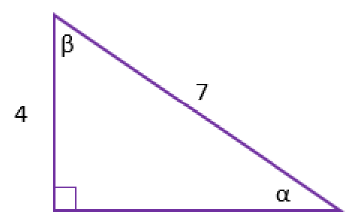
Si utilizamos el Teorema de Pitágoras para comprobar que el triángulo es un triángulo rectángulo, también se puede usar para hallar la medida de algún lado o cateto que falte.

Para hallar la hipotenusa…		$a^2 + b^2 = c^2$ $4^2 + 5^2 = c^2$ $16 + 25 = c^2$ $41 = c^2$ $\sqrt{41 = c^2}$ **$\sqrt{41} = c$**
Para hallar un cateto…		$a^2 = \sqrt{c^2 - b^2}$ $a^2 = \sqrt{10^2 - 6^2}$ $a^2 = \sqrt{100 - 36}$ $a^2 = \sqrt{64}$ $\sqrt{a^2} = \sqrt{64}$ **$a = 8$**

Usemos Pitágoras para hallar el cateto o lado que falte y expresemos sen α, cos β y tan α.

ILUSTRACIÓN 5 Usando Pitágoras





¿Qué nos falta? – *hipotenusa*

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$(3)^2 + (5)^2 = c^2$$

$$9 + 25 = c^2$$
$$34 = c^2$$
$$\sqrt{34 = c^2}$$
$$\sqrt{34} = c$$

¿Qué nos falta? - *cateto*

$$a^2 = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$a^2 = \sqrt{(7)^2 - (4)^2}$$
$$a^2 = \sqrt{49 - 16}$$
$$a^2 = \sqrt{33}$$
$$\sqrt{a^2} = \sqrt{33}$$
$$a = \sqrt{33}$$

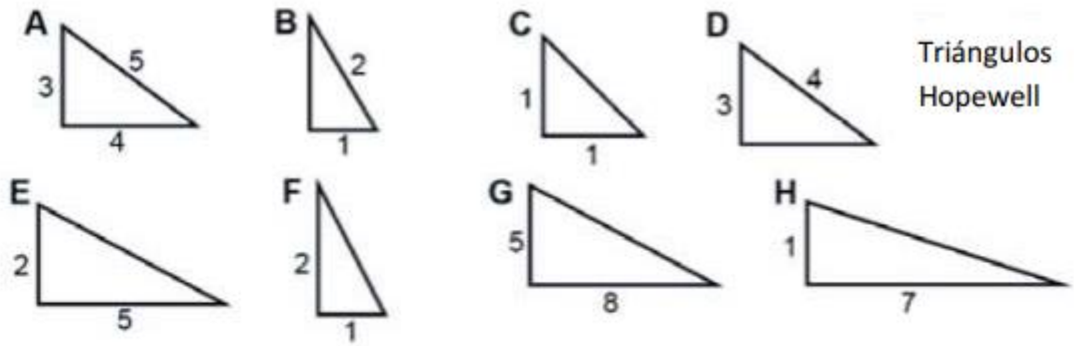
sen α = $\frac{5}{\sqrt{34}}$ cos β = $\frac{5}{\sqrt{34}}$

tan α = $\frac{5}{3}$

sen α = $\frac{4}{7}$ cos β = $\frac{4}{7}$

tan α = $\frac{4}{\sqrt{33}}$

Tarea de Desempeño 11.2- Geometría Hopewell



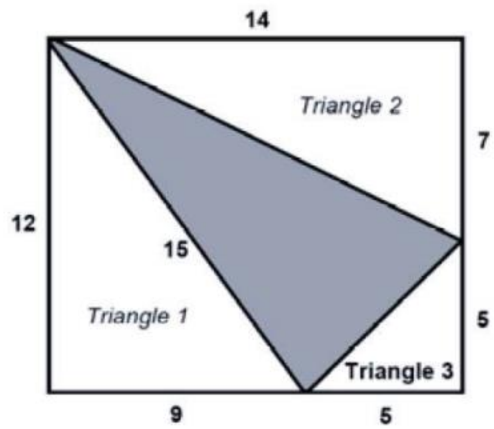
Los Hopewell eran una población Indio-Americana que vivía en el Valle de Ohio hace 2000 años. El pueblo de Hopewell construyó trabajos de tierra utilizando triángulos rectángulos.


Imagen recuperada de https://www.nps.gov/hocu/learn/historyculture/hopewell-ceremonial-earthworks.htm

1) ¿Cuál es la hipotenusa del Triángulo H? Redondea tu respuesta a un lugar decimal. Muestre todo su trabajo y sus cálculos.

2) ¿Cuál es el tamaño del ángulo más pequeño en el triángulo A? Redondea tu respuesta a un lugar decimal. Muestre todo su trabajo y sus cálculos.

El diagrama a continuación, muestra uno de los trabajos de tierra hechos por los Hopewell.



Los tres triángulos rectángulos que rodean el triángulo sombreado forman un rectángulo de 12 unidades por 14 unidades. Cada uno de los tres triángulos rectángulos es semejante a uno de los triángulos Hopewell. Por ejemplo, triángulo 3 arriba es semejante a triángulo C de los triángulos Hopewell.

3) ¿Cuál Triángulo Hopewell es semejante al triángulo 1? Explica tu decisión.

4) ¿Es el triángulo sombreado un triángulo recto? Explica tu decisión utilizando tu conocimiento de trigonometría.

Rúbrica

Unidad 11.2: Los Trigonometría en el triángulo rectángulo

Tarea de desempeño – Geometría Hopewell

Valor: 16 puntos

Categoría	Excelente	Bueno	Aceptable	Requiere mejorar	
	4	3	2	1	Puntuación
Comprensión de los conceptos	Demuestra total comprensión sobre el Teorema de Pitágoras, las funciones y sus razones trigonométricas, la clasificación de triángulos y la semejanza de triángulos.	Demuestra bastante comprensión sobre el Teorema de Pitágoras, las funciones y sus razones trigonométricas, la clasificación de triángulos y la semejanza de triángulos.	Demuestra comprensión en algunos conceptos y confusión en otros de los requeridos en la tarea; Teorema de Pitágoras, clasificación de triángulos, razones trigonométricas y semejanza entre triángulos.	Demuestra poca o ninguna comprensión sobre los conceptos requeridos en la tarea; Teorema de Pitágoras, clasificación de triángulos, razones trigonométricas y semejanza entre triángulos.	
Proceso Matemático	Utiliza el proceso adecuado para hallar y analizar las medidas de los lados y ángulos de los triángulos y los resuelve total y correctamente según requerido en la tarea.	Utiliza el proceso adecuado para hallar y analizar las medidas de los lados y ángulos de los triángulos según requerido en la tarea y lo resuelve con un mínimo de error.	Utiliza un proceso en algunos casos adecuado para hallar y analizar algunas de las medidas de los lados y ángulos de los triángulos, pero presenta dificultad al resolver. Obtiene algunas respuestas correctas.	Utiliza algún proceso para hallar las medidas de los lados y ángulos de los triángulos y resuelve algo o nada de la tarea requerida.	
Comunicación	Explica de forma totalmente clara, correcta y apropiada los procesos y las respuestas según requerido en la tarea. Demuestra total dominio al comunicar de forma escrita sus ideas y respuestas. Utiliza razonamiento y evidencia totalmente relevante y suficiente.	Explica de forma bastante clara, correcta y apropiada los procesos y las respuestas según requerido en la tarea. Demuestra bastante dominio al comunicar de forma escrita sus ideas y respuestas. Utiliza razonamiento y evidencia bastante relevante y suficiente.	Explica de forma clara, correcta y apropiada los procesos y las respuestas según requerido en la tarea. Demuestra poco o algún dominio al comunicar de forma escrita sus ideas y respuestas. Utiliza razonamiento y evidencia poco o algo relevante y suficiente.	Explica de forma confusa e inapropiada los procesos y las respuestas según requerido en la tarea. Demuestra pobre o ningún dominio al comunicar de forma escrita sus ideas y respuestas. Utiliza razonamiento y evidencia poco o nada relevante y suficiente.	
Presentación	Presenta de forma clara y ordenada. Trabajo fácil de entender.	Presenta de forma bastante clara y ordenada. En su gran mayoría, el trabajo es fácil de entender.	Presenta de forma confusa; dificultad para entender el trabajo.	Presenta de forma descuidada, por lo cual demuestra un desinterés por la calidad del trabajo.	

Valores de las funciones trigonométricas básicas

A continuación veremos una tabla que muestra los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo dado. Para poder resolver problemas que incluyan las funciones trogonométricas podemos utilizar esta tabla para sustituir los valores o hallar o verificar el valor de la función usando una calculadora científica o tu celular.

Ángulo	seno	coseno	tangente	Ángulo	seno	coseno	tangente
0º	0	1	0	46º	0,719	0,695	1,036
1º	0,018	1	0,018	47º	0,731	0,682	1,072
2º	0,035	0,999	0,035	48º	0,743	0,669	1,111
3º	0,052	0,999	0,052	49º	0,755	0,656	1,15
4º	0,07	0,998	0,07	50º	0,766	0,643	1,192
5º	0,087	0,996	0,088	51º	0,777	0,629	1,235
6º	0,105	0,995	0,105	52º	0,788	0,616	1,28
7º	0,122	0,993	0,123	53º	0,799	0,602	1,327
8º	0,139	0,99	0,141	54º	0,809	0,588	1,376
9º	0,156	0,988	0,158	55º	0,819	0,574	1,428
10º	0,174	0,985	0,176	56º	0,829	0,559	1,483
11º	0,191	0,982	0,194	57º	0,839	0,545	1,54
12º	0,208	0,978	0,213	58º	0,848	0,53	1,6
13º	0,225	0,974	0,231	59º	0,857	0,515	1,664
14º	0,242	0,97	0,249	60º	0,866	0,5	1,732
15º	0,259	0,966	0,268	61º	0,875	0,485	1,804
16º	0,276	0,961	0,287	62º	0,883	0,47	1,881
17º	0,292	0,956	0,306	63º	0,891	0,454	1,963
18º	0,309	0,951	0,325	64º	0,899	0,438	2,05
19º	0,326	0,946	0,344	65º	0,906	0,423	2,145
20º	0,342	0,94	0,364	66º	0,914	0,407	2,246
21º	0,358	0,934	0,384	67º	0,921	0,391	2,356
22º	0,375	0,927	0,404	68º	0,927	0,375	2,475
23º	0,391	0,921	0,425	69º	0,934	0,358	2,605
24º	0,407	0,914	0,445	70º	0,94	0,342	2,747
25º	0,423	0,906	0,466	71º	0,946	0,326	2,904
26º	0,438	0,899	0,488	72º	0,951	0,309	3,078
27º	0,454	0,891	0,51	73º	0,956	0,292	3,271
28º	0,47	0,883	0,532	74º	0,961	0,276	3,487
29º	0,485	0,875	0,554	75º	0,966	0,259	3,732
30º	0,5	0,866	0,577	76º	0,97	0,242	4,011
31º	0,515	0,857	0,601	77º	0,974	0,225	4,331
32º	0,53	0,848	0,625	78º	0,978	0,208	4,705
33º	0,545	0,839	0,649	79º	0,982	0,191	5,145
34º	0,559	0,829	0,675	80º	0,985	0,174	5,671
35º	0,574	0,819	0,7	81º	0,988	0,156	6,314
36º	0,588	0,809	0,727	82º	0,99	0,139	7,115
37º	0,602	0,799	0,754	83º	0,993	0,122	8,144
38º	0,616	0,788	0,781	84º	0,995	0,105	9,514
39º	0,629	0,777	0,81	85º	0,996	0,087	11,43
40º	0,643	0,766	0,839	86º	0,998	0,07	14,3
41º	0,656	0,755	0,869	87º	0,999	0,052	19,081
42º	0,669	0,743	0,9	88º	0,999	0,035	28,64
43º	0,682	0,731	0,933	89º	1	0,018	57,289
44º	0,695	0,719	0,966	90º	1	0	Inf.
45º	0,707	0,707	1				

Tabla recuperada de https://sites.google.com/site/matematicaexplicita/_/rsrc/1453588704400/pasos-y-ejemplos-1/seno-coseno-tangente.jpg

Seno y coseno de ángulos complementarios

Previamente habíamos aprendido que el triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90° (grados) y los otros dos ángulos son agudos y complementarios. Observemos que en el ejercicio anterior la **razón** de sen α es igual a la razón de cos β . Esto se debe a que el valor del seno de un ángulo menor que 90º es igual al valor del coseno de su complemento.

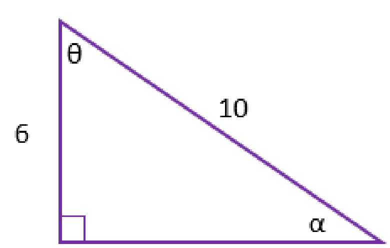
$$\textbf{sen}(\theta) = \textbf{cos}(90 - \theta)$$

$$\textbf{sen}(\theta) = \textbf{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

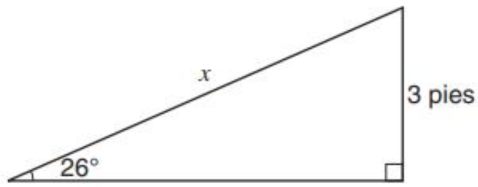
Si θ = 30° y β = 60°, entonces sen 30° = cos 60°.
Valor sen 30° = $\frac{1}{2}$ Valor cos 60° = $\frac{1}{2}$
También podemos utilizar la calculadora científica de tu celular para verificar.
sin 30° = 0.5   Cos 60° = 0.5

Para pensar…

Si cos $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces tan $\frac{\pi}{4}$ = 1

F. ¿Qué vamos entendiendo? Ejercicios de Práctica
Completemos el blanco.      a) α y θ son ángulos ___________ y _____________.   b) La razón trigonométrica sen α es igual a la razón de _______ θ.   c) Si α mide 35°, entonces θ mide _____°.   d) sen _______ ° = cos 55°

Practicando para las metas…



¿Cuál es la ecuación CORRECTA para determinar la longitud, x, de la rampa?

A $x = \dfrac{\text{sen}26°}{3}$

B $x = \dfrac{3}{\text{sen}26°}$

C $x = 3(\text{sen}26°)$

D $x = 3(\cos 26°)$

$\text{sen } 26° = \frac{3}{x} \longrightarrow x(\text{sen } 26°) = 3 \longrightarrow x = \frac{3}{\text{sen } 26°}$

Observa la siguiente tabla de valores aproximados de seno y de coseno de los ángulos α y β entre $0°$ y $90°$.

Ángulo	Seno	Coseno
α	0.422	0.906
β	0.906	0.422

A. ¿Cuál conclusión es verdadera con relación a los ángulos α y β?
B. ¿Cuál ángulo debe ir en el recuadro para que la ecuación $\text{sen}(90° - \alpha) = \cos(\boxed{})$ sea verdadera?

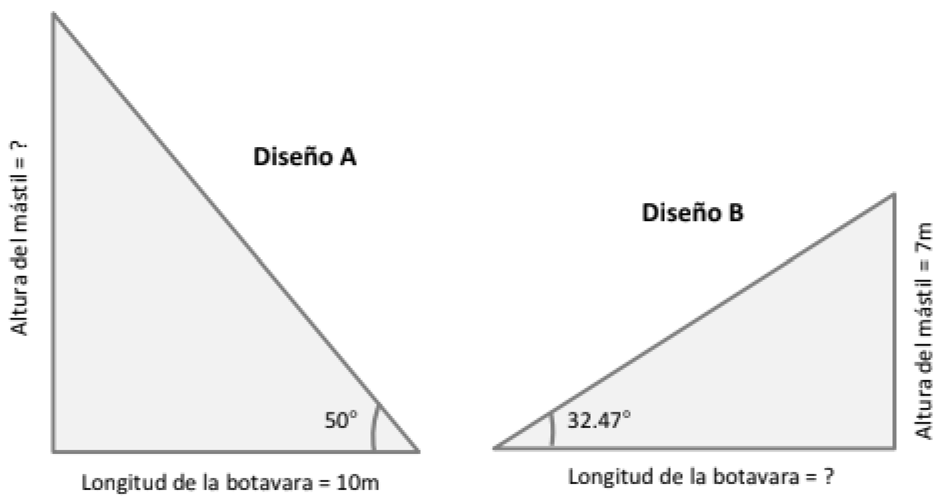
Recuerda contestar todas las partes de la pregunta en el espacio provisto.

A. α y β son ángulos complementarios
B. α

Tarea de Desempeño 11.2- Las Velas

Las velas de los botes que estuvieron recientemente en el “round the world yacht” son de donde proviene la fuerza de los botes. Mientras más grandes sean, más viento pueden atrapar y así el bote va más rápido.

Sin embargo, el diseño de la vela está restringido por la longitud de la botavara de la vela y por la altura del mástil. Nuestro diseñador trabaja con dos modelos. El capitán le ha dicho que 9m es lo más alto que puede ser el mástil y 10m es lo más largo que está permitido para la botavara.



1) Trabaja la altura del mástil en el diseño A.

2) Trabaja la longitud de la botavara en el diseño B.

3) Trabaja con el área de cada triangulo para encontrar cuál tiene el área más grande.

4) Hay un problema con el diseño A; explique por qué.

5) Hay un problema con el diseño B; explique por qué.

6) Restrinja la altura del diseño A, a lo que está permitido y recalcule el área.

7) Restrinja el tamaño de la botavara en el diseño B a lo que está permitido y recalcule el área.

8) ¿Cuál de los dos diseños da la mayor área para la vela?

Rúbrica

Unidad 11.2: Trigonometría en el triángulo rectángulo

Tarea de desempeño – Las Velas

Valor: 56 puntos

Categoría	Excelente (7 puntos)	Bueno (6-5 puntos)	Aceptable (4-3 puntos)	Requiere mejorar (2-1 puntos)	Puntuación
Comprensión del tema	Demuestra comprensión total de las funciones y razones trigonométricas, y los conceptos de base y altura del triángulo.	Demuestra comprensión en la mayoria de las funciones y razones trigonométricas, y los conceptos de base y altura del triángulo.	Demuestra alguna comprensión de las funciones y razones trigonométricas, y los conceptos de base y altura del triángulo.	Demuestra poca o ninguna comprensión de las funciones y razones trigonométricas, y los conceptos de base y altura del triángulo.	
Comunicación	Explica de forma clara y correcta los problemas presentados en los diseños A y B de las velas. Utiliza el álgebra correctamente para hallar la altura, la base y calcular el área de los triángulos.	Explica de forma correcta los problemas presentados en los diseños A y B de las velas. Utiliza el álgebra, con un mínimo de error, para hallar la altura, la base y calcular el área de los triángulos.	Explica con dificultad los problemas presentados en los diseños A y B de las velas. Utiliza el álgebra, con un mínimo de error, para hallar la altura, la base y calcular el área de los triángulos.	Guarda poca relación la explicación con los problemas presentados en los diseños A y B de las velas. Utiliza con mucha dificultad el álgebra para hallar la altura, la base y calcular el área de los triángulos.	
Presentación	Presenta de forma clara y ordenada. Trabajo fácil de entender.	Por lo general, presenta de forma clara y ordenada. Trabajo fácil de entender.	Presenta de forma confusa; dificultad para entender el trabajo.	Presenta de forma descuidada, por lo cual demuestra un desinterés por la calidad del trabajo.	

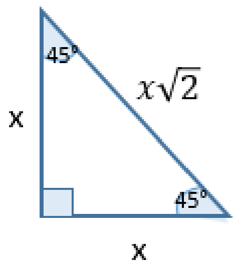
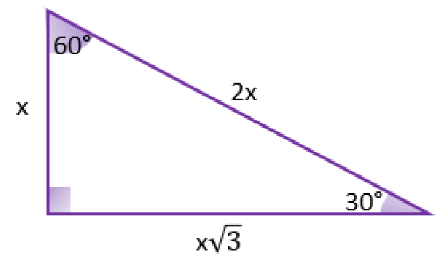
Clave de respuestas:

Ejercicio F: Página 51

agudos y complementarios, cos, 55, 35.

Lección 2.2 Propiedades de los Triángulos especiales y el círculo unitario.

Ahora vamos a utilizar triángulos especiales para determinar los valores de las funciones trigonométricas. Al usar los triángulos especiales y el círculo unitario podemos evaluar las funciones trigonométricas de algunos ángulos sin utilizar la calculadora.

<table>
<tr><td colspan="2">Triángulos Especiales ILUSTRACION 6 Triángulos Especiales</td></tr>
<tr><td>45°- 45°- 90°</td><td>30° - 60° - 90°</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Es un triángulo isósceles (dos de sus catetos miden los mismo). La longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces el cateto.</td><td>Es un triángulo escaleno (ninguno de sus lados miden lo mismo). La longitud de la hipotenusa es dos veces la longitud del cateto más corto. La longitud del cateto más largo es $\sqrt{3}$ veces la longitud del cateto más corto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Demostración con la función seno</td></tr>
<tr><td>sen 45° = $\frac{opuesto}{hipotenusa}$

sen 45° = $\frac{x}{x\sqrt{2}}$
Racionalizamos el denominador y simplificamos la fracción
$\frac{x}{x\sqrt{2}}\frac{(\sqrt{2})}{(\sqrt{2})} = \frac{\cancel{x}\sqrt{2}}{\cancel{x}\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
entonces obtenemos
sen 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>sen 60° = $\frac{opuesto}{hipotenusa}$

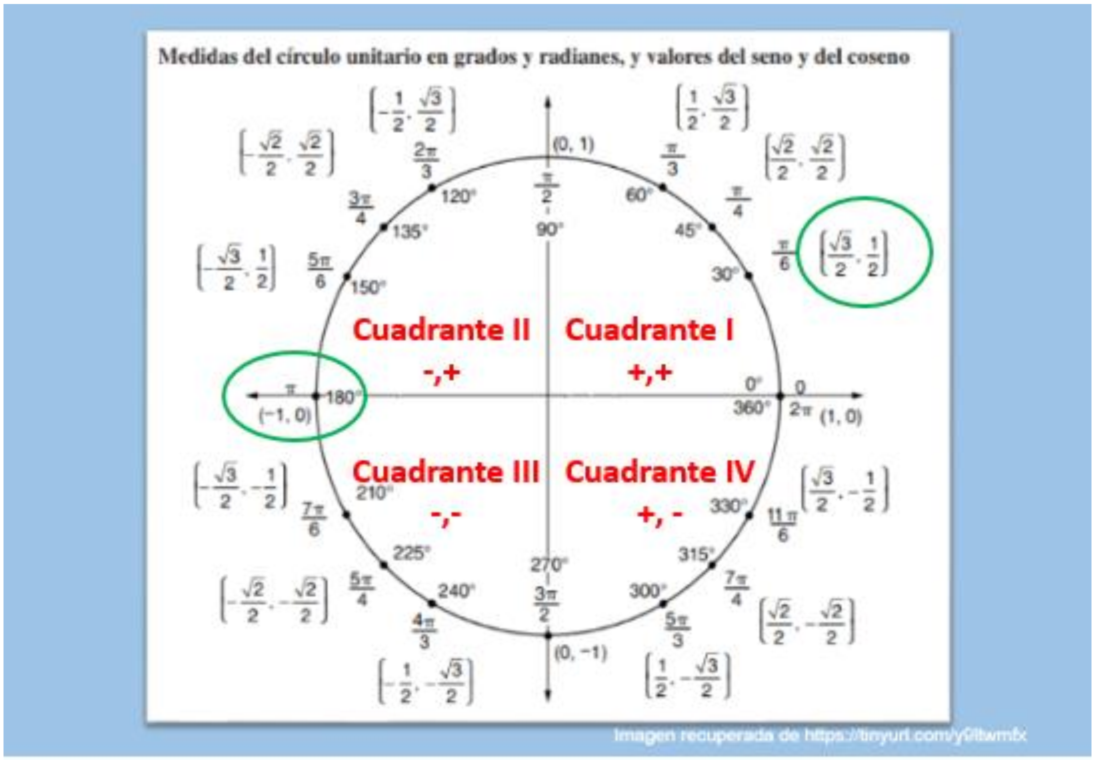
sen 60° = $\frac{x\sqrt{3}}{2x}$
Simplificamos la fracción
$\frac{\cancel{x}\sqrt{3}}{2\cancel{x}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
entonces obtenemos
sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">No olvidemos que …
45° = $\frac{\pi}{4}$ 60° = $\frac{\pi}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Así como demostramos con la función de seno para los ángulos de 45° y 60°, podemos hallar el valor de las funciones trigonométricas restantes para el ángulo de 30°.</td></tr>
</table>

Lección 2.2 Triángulos Especiales **Ejercicios para calificar** Valor sugerido 36 puntos Completa la tabla de valores de las relaciones trigonométricas para ángulos. Recuerda: tan $=\frac{sen}{cos}$, csc $=\frac{1}{sen}$, sec $=\frac{1}{cos}$, cot $=\frac{1}{tan}=\frac{cos}{sen}$ Demuestra el procedimiento y explica el razonamiento que utilizaste para llegar a tus respuestas.							
θ en radianes	θ en grados	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$			$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	
$\frac{\pi}{4}$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sqrt{2}$		1
$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{3}$		2	

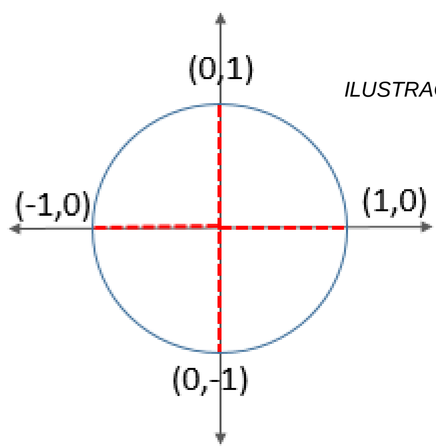
Rubrica Sugerida				
Puntuación por cada ejercicio.	3 puntos	2 puntos	1 punto	0 puntos
Criterios	Determina una ecuación o fórmula para trabajar el ejercicio o problema. Plantea y realiza los procesos. Contesta correctamente.	Contesta sin proceso que justifique su respuesta Contesta correctamente.	Plantea y realiza un proceso incompleto o erróneo para justificar su respuesta. No contesta correctamente.	No realizó el ejercicio.

Círculo unitario

Previamente, en la lección 1.2 habíamos visto el círculo unitario. Ahora, además de observar los ángulos en grados y radianes, nos fijaremos en los valores de las coordenadas.



Los valores de (coseno, seno) se refieren a las coordenadas del radio 1 de acuerdo a su posición alrededor del círculo.



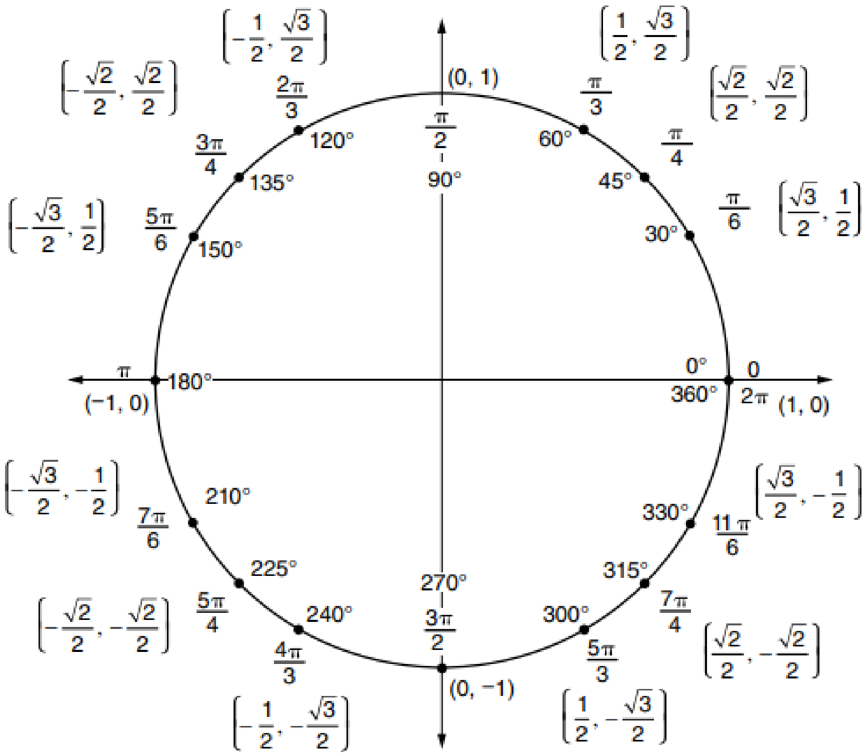
ILUSTRACION 7 Coordenadas

Imagen recuperada de https://tinyurl.com/ydcfuqs4

Para conocer del círculo unitario y la función seno podemos acceder al siguiente video https://www.youtube.com/watch?v=-7i3x5MxSGk (math2me, 2010).

Podemos interpretar las coordenadas como (cos, sen). Evaluemos las coordenadas para algunos ángulos del círculo unitario.

Medidas del círculo unitario en grados y radianes, y valores del seno y del coseno



ángulo		cuadrante	signos	cos (x)	sen (y)	tan $(\frac{y}{x}) = \frac{sen}{cos}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	I	+,+	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	II	-,+	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$
$\frac{4\pi}{3}$	240°	III	-,-	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	330°	IV	+,-	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Cuando aplicamos las razones trigonométricas para resolver problemas del diario vivir, surgen conceptos como **ángulo de elevación**, **ángulo de depresión** y **ángulo de inclinación**.

ángulo de elevación | ángulo de depresión | ángulo de inclinación.

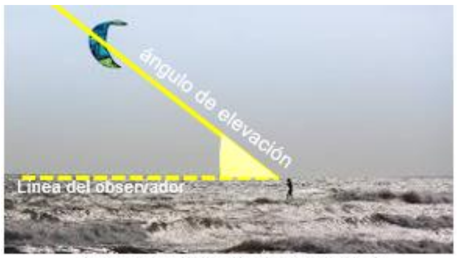
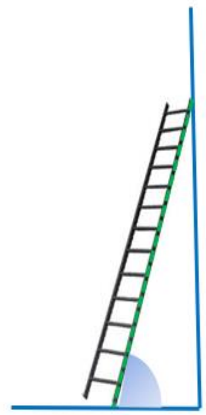


Imagen recuperada de https://www.peakpx.com/

Imagen recuperada de www.publicdomainpictures.net


ILUSTRACION 8 ángulos/ línea del observador

Usemos lo que hemos aprendido hasta ahora de las razones trigonométricas, triángulos especiales y el teorema de Pitágoras para resolver triángulos rectángulos en problemas aplicados.

Ejemplo: **Ángulo de elevación**- Paso a Paso

Un practicante del deporte de surf de paracaídas (kitesurfing) mide 6 pies (≈ 1.83 metros). Las líneas que sujetan el paracaídas o vela miden 22 metros y tiene un ángulo de elevación de 64 °. ¿Cuál es la altura del paracaída o vela?

1. Observemos la ilustración 8 o podemos dibujar un diagrama de la situación.
2. Determinemos la ecuación que podemos utilizar para resolver el problema.
   $\text{sen } 64° = \frac{\mathbf{x}}{22}$
3. Simplificamos y despejamos para hallar el valor de la altura (x).
   $(22)\ \text{sen } 64° = \frac{\mathbf{x}}{\cancel{22}}\ \cancel{(22)}$
4. 22 sen 64° = x Sustituimos sen 64° por su valor aproximado 0.899 (puedes verificar usando la calculadora)
5. 22 (0.899) = x
6. 19.78 = x
7. Para hallar la altura del paracaída o vela, no podemos olvidar añadir la altura del deportista.
   19.78 metros + 1.83 metros
   La altura del paracaída o vela es proximadamente **21.61** metros de altura.

Ejemplo: **Ángulo de depresión** - Paso a Paso

Una persona está a una altura de 25 metros en un faro observando un par de playeros (aves costeras), a un ángulo de depresión de 16°. ¿Cuán distante está el playero de la base del faro?

1. Observemos la ilustración 8 o podemos dibujar un diagrama de la situación.
2. Determinemos la ecuación que podemos utilizar para resolver el problema.

   Tan 16° = $\frac{\mathbf{x}}{25}$
3. Simplificamos y despejamos para hallar el valor de la altura (x).

   (25) tan 16° = $\cancel{\frac{\mathbf{x}}{25}(25)}$
4. 25 tan 16° = x Sustituimos tan 16° por su valor aproximado 0.287 (puedes verificar usando la calculadora)
5. 25 (0.287) = x
6. 7.175 = x

El playero (pájaro costero) está a una distancia aproximada de **7.18** metros de la base del faro.

Ejemplo: **Ángulo de inclinación** - Paso a Paso

Una escalera de 9 pies está recostada sobre una pared a una distancia de 3 pies. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la escalera?

1. Observemos la ilustración 8 o podemos dibujar un diagrama de la situación.
2. Determinemos la ecuación que podemos utilizar para resolver el problema.

   cos x = $\frac{3}{9}$ Ahora estaremos buscando el valor del ángulo (x)
3. X = $cos^{-1}\frac{3}{9}$ $\longleftrightarrow$ X = $cos^{-1}\frac{1}{3}$ (Fracción simplificada)
4. X = $cos^{-1}\frac{1}{3}$ Usamos la calculadora para hallar el valor de $cos^{-1}\frac{1}{3}$
5. X = 70.5287

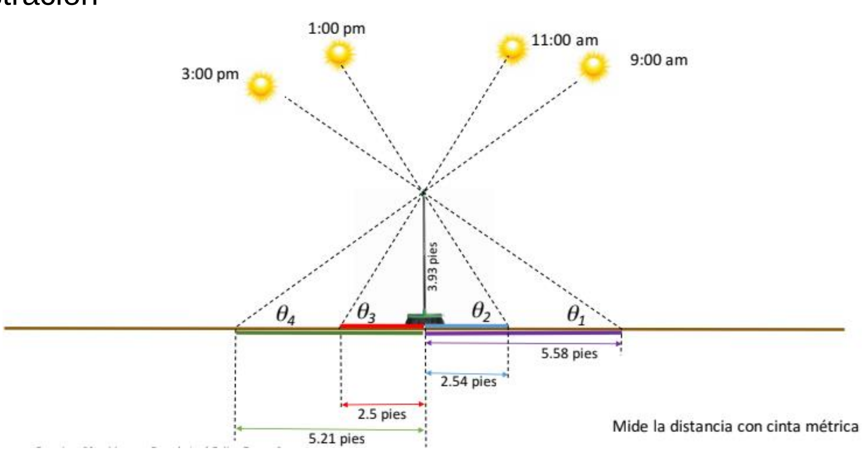
El ángulo de inclinación de la escalera es aproximadamente **71°**.

Tarea de Desempeño 11.2- Ángulo del Sol

Eres un historiador científico que intenta saber más sobre los métodos usados para llevar la hora antes de la invención del reloj. Lo único que sabes hasta ahora es que la gente usaba las sombras para determinar la hora. Tu tarea es aplicar tu conocimiento de trigonometría para hacer una correlación entre las sombras y el ángulo de elevación del sol. Para entender mejor cómo podrían usarse estas sombras para marcar la hora, realizarás un experimento.

1. Medirás la sombra de un objeto de una altura fija en cuatro momentos distintos del día.
   a) Puedes utilizar un palo de escoba, el tubo de una verja o cualquier otro objeto al que puedas medir la altura cómodamente. Es recomendable que hagas dos medidas en la mañana (por ejemplo 8:30 y 11:00 am) y dos medidas en la tarde (por ejemplo 2:00 y 5:00pm). Estas hora de medir son solo una sugerencia pero es recomendable que las cuatro medidas estén separadas en tiempo.
   b) Trata que cuando midas la sombra el objeto esté perpendicular al suelo (a un ángulo de 90 grados).
2. En un informe escrito para entregar, incluirás una serie de diagramas en que se traza el progreso del sol, cálculos que demuestran cómo se utilizó la tangente inversa para calcular el ángulo de elevación y conclusiones sobre la relación entre la hora del día, las sombras y los varios ángulos del sol.
3. Todas las conclusiones deben estar justificadas por los resultados del experimento.

Ejemplo Ilustración



Rúbrica

Unidad 11.2: Los Trigonometría en el triángulo rectángulo

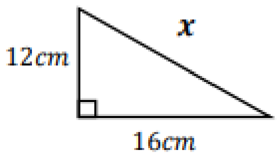
Tarea de desempeño – Ángulo del Sol

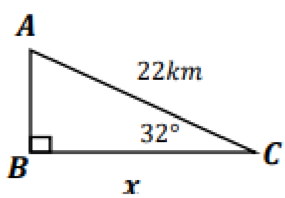
Valor: 30 puntos

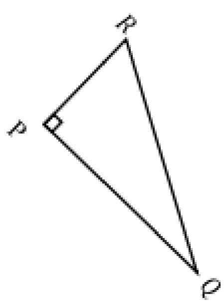
CATEGORIA	***EXCELENTE***	***BUENO***	***ACEPTABLE***	***DEFICIENTE***	***Puntuación***
Gráfica	Consruye diagramas con datos precisos y fáciles de leer. Los datos presentados coinciden con el diagrama (son proporcionales). **(7 PUNTOS)**	Construye diagramas fáciles de leer. La mayoría de los datos coinciden con el diagrama (son proporcionales). **(5 PUNTOS)**	Construye diagramas fáciles de leer. Algunos datos coinciden con el diagrama (son proporcionales) **(3 PUNTOS)**	El diagrama no es fácil de leer. Los datos presentados no coinciden con el diagrama (no son proporcionales). **(1 PUNTO)**	
Comprensión del Tema **Precisión**	Utiliza correctamente el concepto de función inversa para calcular el ángulo de elevación en todas las medidas realizadas. Los resultados obtenidos son precisos y adecuados para **todas** las medidas. **(8 PUNTOS)**	Utiliza correctamente el concepto de función inversa para calcular el ángulo de elevación en las medidas realizadas. Los resultados obtenidos son precisos y adecuados para la **mayoría** de las medidas. **(6 PUNTOS)**	Utiliza el concepto de función inversa para calcular el ángulo de elevación en las medidas realizadas. Los resultados obtenidos son adecuados en **algunas** de las medidas. **(4 PUNTOS)**	Aunque utiliza el concepto de función inversa para calcular el ángulo de elevación en las medidas realizadas, los resultados obtenidos no son adecuados ni precisos de acuerdo a las medidas realizadas. **(1 PUNTO)**	
Comunicación	Explica de manera clara y correcta la relación entre la hora del día, la longitud de la sombra y los ángulos del sol. Utiliza excelentemente los resultados obtenidos para demostrar dicha relación. **(8 PUNTOS)**	Explica mayormente de manera clara y correcta la relación entre la hora del día, la longitud de la sombra y los ángulos del sol. Utiliza los resultados obtenidos para demostrar dicha relación. **(6 PUNTOS)**	Explica la relación entre la hora del día, la longitud de la sombra y los ángulos del sol con cierta dificultad. Utiliza algunos de los resultados obtenidos para demostrar dicha relación. **(4 PUNTOS)**	La explicación de la relación entre la hora del día, la longitud de la sombra y los ángulos del sol no es correcta. No utiliza los datos obtenidos para demostrar dicha relación. **(1 PUNTO)**	
Presentación	El trabajo es presentado de forma ordenada, clara y organizada que es fácil de leer. **(7 PUNTOS)**	En general, el trabajo es presentado de forma ordenada, clara y organizada que es fácil de leer. **(5 PUNTOS)**	Algunos de los elementos del trabajo son presentados de forma ordenada, mientras que en otros se muestra poco interés en la calidad del trabajo. **(3 PUNTOS)**	La presentación de trabajo es descuidada, lo cual demuestra poco interés por la calidad. **(1 PUNTO)**	

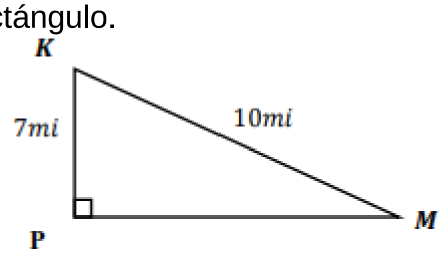
Prueba Unidad II: Los ángulos y sus medidas Valor sugerido 80 puntos

Demuestra el procedimiento para hallar tu respuesta y selecciona la mejor opción cuando lo indique.

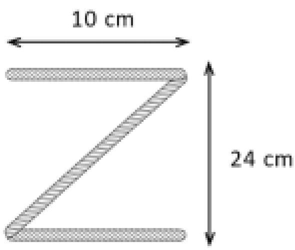
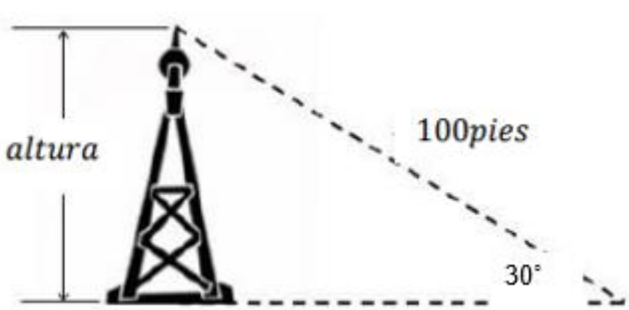
<table>
<tr>
<td>1) ¿Cuál es la medida de la hipotenusa del siguiente triángulo?


</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2) ¿Cuál de las siguientes expresiones se puede usar para calcular el cateto más largo del triángulo ABC? Halla el valor del cateto más largo (x).


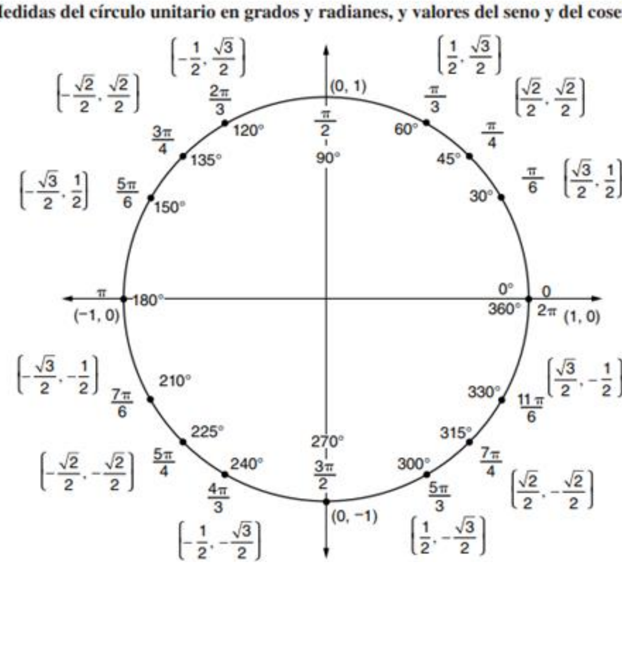
</td>
<td>A) cos 32 = $\frac{x}{22}$
B) sen 22= $\frac{x}{32}$
C) sen 32 = $\frac{x}{22}$
D) cos 22 = $\frac{x}{32}$</td>
</tr>
<tr>
<td>3) Determina $\overline{PQ}$, si $\overline{RQ}$ = 25cm y $m < Q$ = 33° (medida del ángulo Q)


</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>4) Determina el lado que falta en el triangulo rectángulo.


</td>
<td></td>
</tr>
</table>

5) Calcula los centímetros de cuerda que se necesitan para formar la letra Z, dado las siguientes dimensiones:  	A) $26cm$ B) $36cm$ C) $46cm$ D) $56cm$
6) ¿Cuál de las siguientes alternativas es la ecuación para calcular la altura de la antena en la siguiente figura? Determina la altura de la antena.  	A) a = 100(cos35°) B) a = 100(sen35°) C) a = 100(cot35°) D) a = 100(tan35°)

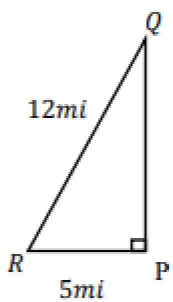
Medidas del círculo unitario en grados y radianes, y valores del seno y del coseno

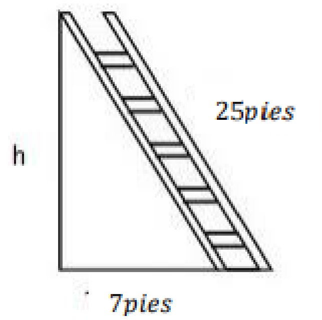


7) Utiliza el círculo unitario para completar la siguiente tabla:

θ en radianes	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
$\frac{\pi}{4}$						
$\frac{5\pi}{4}$						
$\frac{2\pi}{3}$						

8) Determina la medida del ángulo $\boldsymbol{Q}$ en el siguiente triángulo.



9) Una escalera de 25pies recostada sobre una pared y retirada al pie de esta a 7 pies, según lo muestra la figura.  	A) Determina el alto de la pared. B) Determina el ángulo que la escalera tiene respecto al piso.
10) En un triángulo rectángulo ABC, B es un ángulo recto y $m < A$ = 23° (medida del ángulo A). Si el lado opuesto al ángulo A mide 17cm ¿Cuánto mide la hipotenusa?	
11) Una hormiga en el suelo te está mirando desde el ángulo de 24 grados. Tú tienes 5 pies de altura. ¿Qué tan lejos está la hormiga de ti?	
12) Una persona de 6 pies de estatura, está parada a 20 pies de un poste de alumbrado público y proyecta una sombra de 10 pies de longitud. ¿Cuál es la altura del poste?	

REFERENCIAS

Andalón, J. [math2me]. (2016). Longitud de un arco de cirunferencia de N grados [Video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=pa7RKOQGmiI

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). 6.1 Medida de un ángulo. En Precálculo Matemáticas para el Cálculo (6th ed., pp. 434–492).

[Matemáticas profe Alex]. (2018). Qué es un Radián [Video]. Recuperado de https://youtu.be/L5GNg9a_gSc

[math2me]. (2010). *Círculo unitario #1 (Función Seno) - P1 [Video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=-7i3x5MxSGk

Recursos adicionales

http://intraedu.dde.pr/Ejercicios%20METAPR%202018/Matem%C3%A1ticas/2018%20EJERCICIOS%20DE%20PRACTICA_MATEMATICAS%20G11.pdf

Hopewell
https://www.nps.gov/hocu/learn/historyculture/hopewell-ceremonial-earthworks.htm

Tabla de valores funciones trigonométricas
https://sites.google.com/site/matematicaexplicita/_/rsrc/1453588704400/pasos-y-ejemplos-1/seno-coseno-tangente.jpg

Tareas de desempeño
https://progmatecarolina.blogspot.com/search?q=rubricas

Estimada familia:

El Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) tiene como prioridad el garantizar que a sus hijos se les provea una educación pública, gratuita y apropiada. Para lograr este cometido, es imperativo tener presente que los seres humanos son diversos. Por eso, al educar es necesario reconocer las habilidades de cada individuo y buscar estrategias para minimizar todas aquellas barreras que pudieran limitar el acceso a su educación.

La otorgación de acomodos razonables es una de las estrategias que se utilizan para minimizar las necesidades que pudiera presentar un estudiante. Estos permiten adaptar la forma en que se presenta el material, la forma en que el estudiante responde, la adaptación del ambiente y lugar de estudio y el tiempo e itinerario que se utiliza. Su función principal es proveerle al estudiante acceso equitativo durante la enseñanza y la evaluación. Estos tienen la intención de reducir los efectos de la discapacidad, excepcionalidad o limitación del idioma y no, de reducir las expectativas para el aprendizaje. Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, se debe tener altas expectativas con nuestros niños y jóvenes.

Esta guía tiene el objetivo de apoyar a las familias en la selección y administración de los acomodos razonables durante el proceso de enseñanza y evaluación para los estudiantes que utilizarán este módulo didáctico. Los acomodos razonables le permiten a su hijo realizar la tarea y la evaluación, no de una forma más fácil, sino de una forma que sea posible de realizar, según las capacidades que muestre. El ofrecimiento de acomodos razonables está atado a la forma en que su hijo aprende. Los estudios en neurociencia establecen que los seres humanos aprenden de forma visual, de forma auditiva o de forma kinestésica o multisensorial, y aunque puede inclinarse por algún estilo, la mayoría utilizan los tres.

Por ello, a continuación, se presentan algunos ejemplos de acomodos razonables que podrían utilizar con su hijo mientras trabaja este módulo didáctico en el hogar. Es importante que como madre, padre o persona encargada en dirigir al estudiante en esta tarea los tenga presente y pueda documentar cuales se utilizaron. Si necesita más información, puede hacer referencia a la ***Guía para la provisión de acomodos razonables*** (2018) disponible por medio de la página www.de.pr.gov, en educación especial, bajo Manuales y Reglamentos.

GUÍA DE ACOMODOS RAZONABLES PARA LOS ESTUDIANTES QUE TRABAJARÁN BAJO MÓDULOS DIDÁCTICOS

Acomodos de presentación	Acomodos en la forma de responder	Acomodos de ambiente y lugar	Acomodos de tiempo e itinerario
Cambian la manera en que se presenta la información al estudiante. Esto le permite tener acceso a la información de diferentes maneras. El material puede ser presentado de forma auditiva, táctil, visual o multisensorial.	Cambian la manera en que el estudiante responde o demuestra su conocimiento. Permite a los estudiantes presentar las contestaciones de las tareas de diferentes maneras. Por ejemplo, de forma verbal, por medio de manipulativos, entre otros.	Cambia el lugar, el entorno o el ambiente donde el estudiante completará el módulo didáctico. Los acomodos de ambiente y lugar requieren de organizar el espacio donde el estudiante trabajará.	Cambian la cantidad de tiempo permitido para completar una evaluación o asignación; cambia la manera, orden u hora en que se organiza el tiempo, las materias o las tareas.
Aprendiz visual: ▪ Usar letra agrandada o equipos para agrandar como lupas, televisores y computadoras ▪ Uso de láminas, videos pictogramas. ▪ Utilizar claves visuales tales como uso de colores en las instrucciones, resaltadores (highlighters), subrayar palabras importantes. ▪ Demostrar lo que se espera que realice el estudiante y utilizar modelos o demostraciones. ▪ Hablar con claridad, pausado ▪ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante ▪ Añadir al material información complementaria **Aprendiz auditivo**:	**Aprendiz visual:** ▪ Utilizar la computadora para que pueda escribir. ▪ Utilizar organizadores gráficos. ▪ Hacer dibujos que expliquen su contestación. ▪ Permitir el uso de láminas o dibujos para explicar sus contestaciones ▪ Permitir que el estudiante escriba lo que aprendió por medio de tarjetas, franjas, láminas, la computadora o un comunicador visual. ▪ Contestar en el folleto. **Aprendiz auditivo**: ▪ Grabar sus contestaciones ▪ Ofrecer sus contestaciones a un adulto que documentará por escrito lo mencionado.	**Aprendiz visual:** ▪ Ambiente silencioso, estructurado, sin muchos distractores. ▪ Lugar ventilado, con buena iluminación. ▪ Utilizar escritorio o mesa cerca del adulto para que lo dirija. **Aprendiz auditivo**: ▪ Ambiente donde pueda leer en voz alta o donde pueda escuchar el material sin interrumpir a otras personas. ▪ Lugar ventilado, con buena iluminación y donde se les permita el movimiento mientras repite en voz alta el material. **Aprendiz multisensorial:**	**Aprendiz visual y auditivo:** ▪ Preparar una agenda detalladas y con códigos de colores con lo que tienen que realizar. ▪ Reforzar el que termine las tareas asignadas en la agenda. ▪ Utilizar agendas de papel donde pueda marcar, escribir, colorear. ▪ Utilizar “post-it” para organizar su día. ▪ Comenzar con las clases más complejas y luego moverse a las sencillas. ▪ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas. **Aprendiz multisensorial:** ▪ Asistir al estudiante a organizar su trabajo con

Acomodos de presentación	Acomodos en la forma de responder	Acomodos de ambiente y lugar	Acomodos de tiempo e itinerario
▪ Leerle el material o utilizar aplicaciones que convierten el texto en formato audible. ▪ Leer en voz alta las instrucciones. ▪ Permitir que el estudiante se grabe mientras lee el material. ▪ Audiolibros ▪ Repetición de instrucciones ▪ Pedirle al estudiante que explique en sus propias palabras lo que tiene que hacer ▪ Utilizar el material grabado ▪ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante **Aprendiz multisensorial:** ▪ Presentar el material segmentado (en pedazos) ▪ Dividir la tarea en partes cortas ▪ Utilizar manipulativos ▪ Utilizar canciones ▪ Utilizar videos ▪ Presentar el material de forma activa, con materiales comunes. ▪ Permitirle al estudiante investigar sobre el tema que se trabajará ▪ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante	▪ Hacer presentaciones orales. ▪ Hacer videos explicativos. ▪ Hacer exposiciones **Aprendiz multisensorial:** ▪ Señalar la contestación a una computadora o a una persona. ▪ Utilizar manipulativos para representar su contestación. ▪ Hacer presentaciones orales y escritas. ▪ Hacer dramas donde represente lo aprendido. ▪ Crear videos, canciones, carteles, infografías para explicar el material. ▪ Utilizar un comunicador electrónico o manual.	▪ Ambiente se le permita moverse, hablar, escuchar música mientras trabaja, cantar. ▪ Permitir que realice las actividades en diferentes escenarios controlados por el adulto. Ejemplo el piso, la mesa del comedor y luego, un escritorio.	agendas escritas o electrónicas. ▪ Establecer mecanismos para recordatorios que le sean efectivos. ▪ Utilizar las recompensas al terminar sus tareas asignadas en el tiempo establecido. ▪ Establecer horarios flexibles para completar las tareas. ▪ Proveer recesos entre tareas. ▪ Tener flexibilidad en cuando al mejor horario para completar las tareas. ▪ Comenzar con las tareas más fáciles y luego, pasar a las más complejas. ▪ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas.

HOJA DE DOCUMENTAR LOS ACOMODOS RAZONABLES UTILIZADOS AL TRABAJAR EL MÓDULO DIDÁCTICO

Nombre del estudiante: ______________________ **Número de SIE:________**
Materia del módulo: _________________________ **Grado:_______________**

Estimada familia:

1. Utiliza la siguiente hoja para documentar los acomodos razonables que utiliza con tu hijo en el proceso de apoyo y seguimiento al estudio de este módulo. Favor de colocar una marca de cotejo [✓] en aquellos acomodos razonables que utilizó con su hijo para completar el módulo didáctico. Puede marcar todos los que aplique y añadir adicionales en la parte asignada para ello.

Acomodos de presentación	Acomodos de tiempo e itinerario
Aprendiz visual: ☐ Usar letra agrandada o equipos para agrandar como lupas, televisores y computadoras ☐ Uso de láminas, videos pictogramas. ☐ Utilizar claves visuales tales como uso de colores en las instrucciones, resaltadores (*highlighters*), subrayar palabras importantes. ☐ Demostrar lo que se espera que realice el estudiante y utilizar modelos o demostraciones. ☐ Hablar con claridad, pausado ☐ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante ☐ Añadir al material información complementaria **Aprendiz auditivo**: ☐ Leerle el material o utilizar aplicaciones que convierten el texto en formato audible. ☐ Leer en voz alta las instrucciones. ☐ Permitir que el estudiante se grabe mientras lee el material. ☐ Audiolibros ☐ Repetición de instrucciones ☐ Pedirle al estudiante que explique en sus propias palabras lo que tiene que hacer ☐ Utilizar el material grabado ☐ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante **Aprendiz multisensorial:** ☐ Presentar el material segmentado (en pedazos) ☐ Dividir la tarea en partes cortas	**Aprendiz visual:** ☐ Utilizar la computadora para que pueda escribir. ☐ Utilizar organizadores gráficos. ☐ Hacer dibujos que expliquen su contestación. ☐ Permitir el uso de láminas o dibujos para explicar sus contestaciones ☐ Permitir que el estudiante escriba lo que aprendió por medio de tarjetas, franjas, láminas, la computadora o un comunicador visual. ☐ Contestar en el folleto. **Aprendiz auditivo**: ☐ Grabar sus contestaciones ☐ Ofrecer sus contestaciones a un adulto que documentará por escrito lo mencionado. ☐ Hacer presentaciones orales. ☐ Hacer videos explicativos. ☐ Hacer exposiciones **Aprendiz multisensorial:** ☐ Señalar la contestación a una computadora o a una persona. ☐ Utilizar manipulativos para representar su contestación. ☐ Hacer presentaciones orales y escritas. ☐ Hacer dramas donde represente lo aprendido. ☐ Crear videos, canciones, carteles, infografías para explicar el material. ☐ Utilizar un comunicador electrónico o manual.

Acomodos de presentación	Acomodos de tiempo e itinerario
☐ Utilizar manipulativos ☐ Utilizar canciones ☐ Utilizar videos ☐ Presentar el material de forma activa, con materiales comunes. ☐ Permitirle al estudiante investigar sobre el tema que se trabajará ☐ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante	
Acomodos de respuesta	**Acomodos de ambiente y lugar**
Aprendiz visual: ☐ Ambiente silencioso, estructurado, sin muchos distractores. ☐ Lugar ventilado, con buena iluminación. ☐ Utilizar escritorio o mesa cerca del adulto para que lo dirija. **Aprendiz auditivo**: ☐ Ambiente donde pueda leer en voz alta o donde pueda escuchar el material sin interrumpir a otras personas. ☐ Lugar ventilado, con buena iluminación y donde se les permita el movimiento mientras repite en voz alta el material. **Aprendiz multisensorial:** ☐ Ambiente se le permita moverse, hablar, escuchar música mientras trabaja, cantar. ☐ Permitir que realice las actividades en diferentes escenarios controlados por el adulto. Ejemplo el piso, la mesa del comedor y luego, un escritorio.	**Aprendiz visual y auditivo:** ☐ Preparar una agenda detalladas y con códigos de colores con lo que tienen que realizar. ☐ Reforzar el que termine las tareas asignadas en la agenda. ☐ Utilizar agendas de papel donde pueda marcar, escribir, colorear. ☐ Utilizar "post-it" para organizar su día. ☐ Comenzar con las clases más complejas y luego moverse a las sencillas. ☐ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas. **Aprendiz multisensorial:** ☐ Asistir al estudiante a organizar su trabajo con agendas escritas o electrónicas. ☐ Establecer mecanismos para recordatorios que le sean efectivos. ☐ Utilizar las recompensas al terminar sus tareas asignadas en el tiempo establecido. ☐ Establecer horarios flexibles para completar las tareas. ☐ Proveer recesos entre tareas. ☐ Tener flexibilidad en cuando al mejor horario para completar las tareas. ☐ Comenzar con las tareas más fáciles y luego, pasar a las más complejas. ☐ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas.
Otros:	

2. Si tu hijo es un candidato o un participante de los servicios para estudiantes aprendices del español como segundo idioma e inmigrantes considera las siguientes sugerencias de enseñanza:

- Proporcionar un modelo o demostraciones de respuestas escritas u orales requeridas o esperadas.
- Comprobar si hay comprensión: use preguntas que requieran respuestas de una sola palabra, apoyos y gestos.
- Hablar con claridad, de manera pausada.
- Evitar el uso de las expresiones coloquiales, complejas.
- Asegurar que los estudiantes tengan todos los materiales necesarios.
- Leer las instrucciones oralmente.
- Corroborar que los estudiantes entiendan las instrucciones.
- Incorporar visuales: gestos, accesorios, gráficos organizadores y tablas.
- Sentarse cerca o junto al estudiante durante el tiempo de estudio.
- Seguir rutinas predecibles para crear un ambiente de seguridad y estabilidad para el aprendizaje.
- Permitir el aprendizaje por descubrimiento, pero estar disponible para ofrecer instrucciones directas sobre cómo completar una tarea.
- Utilizar los organizadores gráficos para la relación de ideas, conceptos y textos.
- Permitir el uso del diccionario regular o ilustrado.
- Crear un glosario pictórico.
- Simplificar las instrucciones.
- Ofrecer apoyo en la realización de trabajos de investigación.
- Ofrecer los pasos a seguir en el desarrollo de párrafos y ensayos.
- Proveer libros o lecturas con conceptos similares, pero en un nivel más sencillo.
- Proveer un lector.
- Proveer ejemplos.
- Agrupar problemas similares (todas las sumas juntas), utilizar dibujos, láminas, o gráficas para apoyar la explicación de los conceptos, reducir la complejidad lingüística del problema, leer y explicar el problema o teoría verbalmente o descomponerlo en pasos cortos.
- Proveer objetos para el aprendizaje (concretizar el vocabulario o conceptos).
- Reducir la longitud y permitir más tiempo para las tareas escritas.
- Leer al estudiante los textos que tiene dificultad para entender.
- Aceptar todos los intentos de producción de voz sin corrección de errores.
- Permitir que los estudiantes sustituyan dibujos, imágenes o diagramas, gráficos, gráficos para una asignación escrita.
- Esbozar el material de lectura para el estudiante en su nivel de lectura, enfatizando las ideas principales.
- Reducir el número de problemas en una página.
- Proporcionar objetos manipulativos para que el estudiante utilice cuando resuelva problemas de matemáticas.

3. Si tu hijo es un estudiante dotado, es decir, que obtuvo 130 o más de cociente intelectual (CI) en una prueba psicométrica, su educación debe ser dirigida y desafiante. Deberán considerar las siguientes recomendaciones:

- Conocer las capacidades especiales del estudiante, sus intereses y estilos de aprendizaje.
- Realizar actividades motivadoras que les exijan pensar a niveles más sofisticados y explorar nuevos temas.
- Adaptar el currículo y profundizar.
- Evitar las repeticiones y las rutinas.
- Realizar tareas de escritura para desarrollar empatía y sensibilidad.
- Utilizar la investigación como estrategia de enseñanza.
- Promover la producción de ideas creativas.
- Permitirle que aprenda a su ritmo.
- Proveer mayor tiempo para completar las tareas, cuando lo requiera.
- Cuidar la alineación entre su educación y sus necesidades académicas y socioemocionales.