MÓDULO DIDÁCTICO DE MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA 2

agosto 2020

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE PUERTO RICO

Página web: https://de.pr.gov/ Twitter: @educacionpr

CONTENIDO

LISTA DE COLABORADORES

Dra. Wanda I. Rivera Rivas
Directora Programa de Matemáticas
Departamento de Educación de Puerto Rico

CARTA PARA EL ESTUDIANTES, LAS FAMILIAS Y MAESTROS

Estimado estudiante:

Este módulo didáctico es un documento que favorece tu proceso de aprendizaje. Además, permite que aprendas en forma más efectiva e independiente, es decir, sin la necesidad de que dependas de la clase presencial o a distancia en todo momento. Del mismo modo, contiene todos los elementos necesarios para el aprendizaje de los conceptos claves y las destrezas de la clase de Álgebra 2, sin el apoyo constante de tu maestro. Su contenido ha sido elaborado por maestros, facilitadores docentes y directores de los programas académicos del Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) para apoyar tu desarrollo académico e integral en estos tiempos extraordinarios en que vivimos.

Te invito a que inicies y completes este módulo didáctico siguiendo el calendario de progreso establecido por semana. En él, podrás repasar conocimientos, refinar habilidades y aprender cosas nuevas sobre la clase de Álgebra 2 por medio de definiciones, ejemplos, lecturas, ejercicios de práctica y de evaluación. Además, te sugiere recursos disponibles en la internet, para que amplíes tu aprendizaje. Recuerda que esta experiencia de aprendizaje es fundamental en tu desarrollo académico y personal, así que comienza ya.

Estimada familia:

El Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) comprometido con la educación de nuestros estudiantes, ha diseñado este módulo didáctico con la colaboración de: maestros, facilitadores docentes y directores de los programas académicos. Su propósito es proveer el contenido académico de la materia de Álgebra 2 para las primeras diez semanas del nuevo año escolar. Además, para desarrollar, reforzar y evaluar el dominio de conceptos y destrezas claves. Esta es una de las alternativas que promueve el DEPR para desarrollar los conocimientos de nuestros estudiantes, tus hijos, para así mejorar el aprovechamiento académico de estos.

Está probado que cuando las familias se involucran en la educación de sus hijos mejoran los resultados de su aprendizaje. Por esto, te invitamos a que apoyes el desarrollo académico e integral de tus hijos utilizando este módulo para apoyar su aprendizaje. Es fundamental que tu hijo avance en este módulo siguiendo el calendario de progreso establecido por semana.

El personal del DEPR reconoce que estarán realmente ansiosos ante las nuevas modalidades de enseñanza y que desean que sus hijos lo hagan muy bien. Le solicitamos a las familias que brinden una colaboración directa y activa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de sus hijos. En estos tiempos extraordinarios en que vivimos, les recordamos que es importante que desarrolles la confianza, el sentido de logro y la independencia de tu hijo al realizar las tareas escolares. No olvides que las necesidades educativas de nuestros niños y jóvenes es responsabilidad de todos.

Estimados maestros:

El Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) comprometido con la educación de nuestros estudiantes, ha diseñado este módulo didáctico con la colaboración de: maestros, facilitadores docentes y directores de los programas académicos. Este constituye un recurso útil y necesario para promover un proceso de enseñanza y aprendizaje innovador que permita favorecer el desarrollo holístico e integral de nuestros estudiantes al máximo de sus capacidades. Además, es una de las alternativas que se proveen para desarrollar los conocimientos claves en los estudiantes del DEPR; ante las situaciones de emergencia por fuerza mayor que enfrenta nuestro país.

El propósito del módulo es proveer el contenido de la materia de Álgebra 2 para las primeras diez semanas del nuevo año escolar. Es una herramienta de trabajo que les ayudará a desarrollar conceptos y destrezas en los estudiantes para mejorar su aprovechamiento académico. Al seleccionar esta alternativa de enseñanza, deberás velar que los estudiantes avancen en el módulo siguiendo el calendario de progreso establecido por semana. Es importante promover el desarrollo pleno de estos, proveyéndole herramientas que puedan apoyar su aprendizaje. Por lo que, deben diversificar los ofrecimientos con alternativas creativas de aprendizaje y evaluación de tu propia creación para reducir de manera significativa las brechas en el aprovechamiento académico.

El personal del DEPR espera que este módulo les pueda ayudar a lograr que los estudiantes progresen significativamente en su aprovechamiento académico. Esperamos que esta iniciativa les pueda ayudar a desarrollar al máximo las capacidades de nuestros estudiantes.

Información adicional

A los maestros, estudiantes, padres, madres o encargados, este Módulo tiene diferentes ejercicios los de aplicación y los de evaluación del curso de Álgebra 2.

Ejercicios de Aplicación: *Padres y Estudiantes,* estos ejercicios son de práctica y tienen sus respuestas para que verifiquen cómo se realizaron. Es importante que se trabajen para el beneficio de todos los estudiantes. No son *Assessment* formativo (no tienen valor numérico).

Ejercicio para Calificar (evaluaciones): *Padres y Estudiantes,* estos ejercicios para calificar son el instrumento de evaluación que tiene el maestro para la acumulación de puntos para el SIE. Los instrumentos aquí utilizados son exámenes, y tareas de desempeño o ejecución. Es importante que el estudiante siga las instrucciones establecidas al inicio de curso por su maestro con relación a su proceso de adjudicación de puntos según carta circular vigente (CC 03-2019-2020). El estudiante en la hoja de contestaciones debe presentar evidencia de **TODO EL PROCESO** que utilizó para resolver todos los ejercicios.

Maestros: Saludos, los instrumentos ofrecidos en la sección de **Ejercicios de Práctica** es para la evaluación formativa de sus estudiantes. Les recuerdo que NO existe clave de los ejercicios para calificar en las evaluaciones, usted la debe crear y la puntuación es sugerida para las primeras 10 semanas, según se establece en la carta circular vigente (CC 03-2019-2020). El contenido de este módulo responde a los estándares, expectativas e indicadores para las primeras 10 semanas de clases, conforme a lo establecido en los Mapas Curriculares, el Prontuario y Calendario de Secuencias del curso de Álgebra 2.

Fórmulas para utilizarse en este módulo

Fórmula de distancia

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pendiente de la recta dado dos puntos

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Fórmula de punto medio

$$\text{PM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Variación directa: $y = ax$

Variación inversa: $y = \frac{a}{x}$

Función par

$f(x) = f(-x)$

Función impar

$f(-x) = -f(x)$

Pendiente e intercepto en y para la ecuación de la línea de mejor ajuste

$$m = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x}$$

Puntuaciones Z: $Z = \frac{X - \bar{\mu}}{\sigma}$

Rúbrica Sugerida

PUNTUACIÓN	CRITERIOS
Respuesta de **5** puntos	La respuesta muestra un entendimiento completo de los conceptos y **los procedimientos matemáticos** para resolver el problema. El estudiante realiza procedimientos completos y da respuestas correctas a todas las partes del problema. La respuesta contiene una explicación clara y efectiva que detalla cómo se resolvió el problema (en los ejercicios de pregunta abierta). La respuesta puede omitir detalles que no indican que el problema no fue comprendido claramente.
Respuesta de **3** puntos	La respuesta es parcialmente correcta. La solución del problema podría ser correcta, pero demuestra un entendimiento incompleto o incorrecto de los conceptos y procedimientos matemáticos esenciales para resolver el problema. O bien, los cómputos podrían ser incorrectos, pero los procedimientos y/o la explicación muestran un entendimiento correcto del procedimiento para encontrar la solución, aunque se hayan cometido algunos errores de cálculo.
Respuesta de **0** punto	La respuesta es completamente incorrecta y no es posible interpretarla con claridad o muestra que la comprensión del estudiante de los procedimientos y conceptos necesarios para resolver el problema es insuficiente. Aunque puede haber evidencia de que algunos conceptos y operaciones son correctos, no son parte de la solución del problema o de la pregunta en general.

Nota: De necesitar alguna rúbrica adicional, el maestro la preparará.

CALENDARIO DE PROGRESO EN EL MÓDULO

DÍAS / SEMANAS	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
1	Lección 1	Ejercicios de Práctica 1	Lección 2	Lección 2	Ejercicios de Práctica 2
2	Repasar	Prueba 1	Lección 3	Ejercicios de Práctica 3	Lección 4
3	Evaluación de Funciones	Operaciones con Funciones	Ejercicios de Práctica 4	Repasar	Prueba 2
4	Lección 5	Ejercicios de Práctica 5	Lección 6	Lección 6	Ejercicios de Práctica 6
5	Repasar	Prueba 3	Lección 7	Ejercicios de Práctica 7	Lección 8
6	Lección 9	Ejercicios de Práctica 8	Lección 10	Ejercicios de Práctica 9	Repasar
7	Prueba 4	Lección 11	Lección 11	Ejercicios de Práctica 10	Asignación
8	Lección 12	Lección 13	Lección 13	Lección 13	Ejercicios de Práctica 11
9	Lección 14	Lección 14	Lección 14	Ejercicios de Práctica 12	Repasar
10	Prueba 5	Proyecto Especial	Proyecto Especial	Proyecto Especial	Proyecto Especial

LECCIONES

En este módulo tendremos la oportunidad de estudiar, aprender y practicar lecciones del curso de Álgebra II. A continuación, presentamos lo que se espera en este aprendizaje.

Estándares	Expectativas	Indicadores	Objetivos
Numeración y operaciones	Usa propiedades de números racionales e irracionales. Razona cuantitativamente y usa unidades para resolver problemas.	Explica por qué la suma, la resta o el producto de dos números racionales es racional; y por qué la suma o el producto de un número racional y un número irracional es irracional. Define cantidades adecuadas con el fin de hacer modelos descriptivos.	1. Reconocer y aplicar las propiedades de los números reales. 2. Calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. 3. Determinar las coordenadas del punto medio de un segmento.
Álgebra	Crea ecuaciones que describan números o relaciones Resuelve sistemas de ecuaciones e inecuaciones Representa y resuelve ecuaciones e inecuaciones gráficamente.	Representa restricciones mediante ecuaciones o inecuaciones, mediante sistemas de ecuaciones y/o inecuaciones, e interpreta las soluciones como opciones viables o	Resolver un sistema que consiste en dos ecuaciones lineales en dos variables usando gráficas, tablas, métodos simbólicos y tecnología. Describir la naturaleza de las soluciones (no tiene solución; una solución; infinitas soluciones). Interpretar la pendiente de una recta en contexto

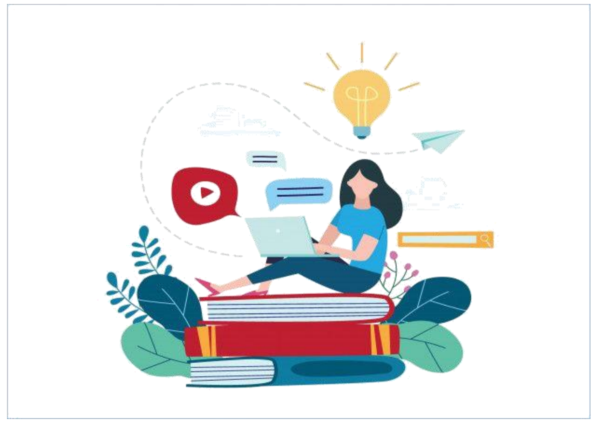
Estándares	Expectativas	Indicadores	Objetivos
		no viables en el contexto de hacer un modelo (ejemplo: Representar inecuaciones al describir restricciones nutricionales y de costos en combinaciones de diferentes alimentos). Utiliza método gráfico, sustitución y eliminación para un sistema 2 x 2 o mayor y lo clasifica en sistema consistente-independiente, consistente-dependiente o inconsistente. Reconoce que la gráfica de una ecuación de dos variables es el conjunto de todas sus soluciones ubicadas en el plano de coordenadas, lo cual frecuentemente	

Estándares	Expectativas	Indicadores	Objetivos
		da una curva (que podría ser una recta).	
Funciones	Entiende el concepto de función y usa notación de funciones. Entiende, interpreta y analiza funciones.	Describe y contrasta funciones elementales comunes (representadas simbólicamente y gráficamente), incluye x , *1/x,* ln x, $\log_a x$, *e* , a y las funciones trigonométricas básicas. Escribe una función definida por una expresión en formas diferentes, pero equivalentes para explicar diferentes propiedades de la función.	Describe y contrasta funciones elementales a partir de la función madre. Escribe una función definida por una expresión en formas diferentes, pero equivalentes para explicar diferentes propiedades de la función. Reconoce las transformaciones de las funciones mediante la comparación con la función madre o función básica. Reconoce las familias de las funciones. Evalúa funciones.

Unidad 1: Fundamentos del Álgebra

Lección 1: El Conjunto de los Números Reales

Los números reales son aquellos compuestos por números racionales e irracionales. Se pueden localizar en una recta numérica. El símbolo para representar los números reales es $\mathbb{R}$. La palabra real se usa para distinguir estos números del número imaginario i, que es igual a la raíz cuadrada de **-1.** La siguiente figura muestra el conjunto de los números reales y los subconjuntos que lo componen.



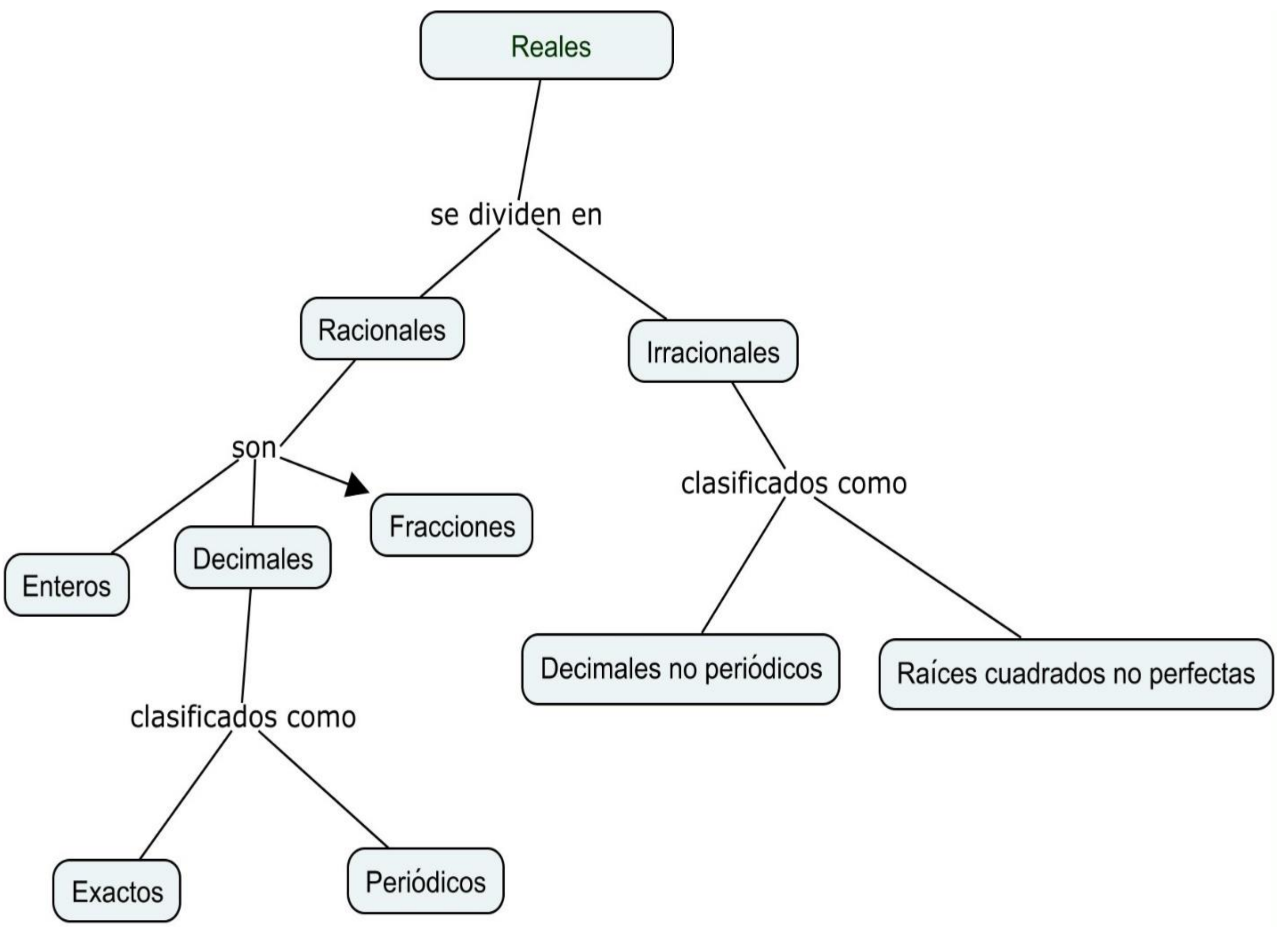
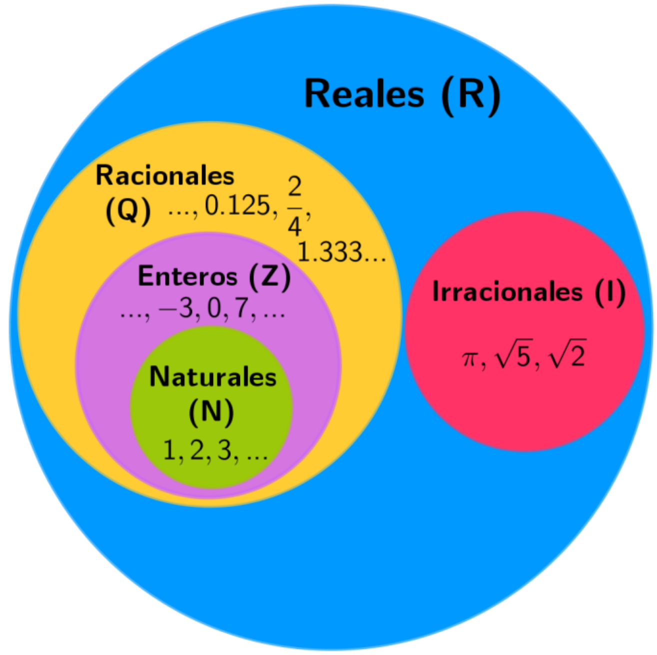


Figura 1: El conjunto de los números reales

Los subconjuntos que componen el conjunto de los números reales son los siguientes:



Racionales

Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como la razón (división) de dos números enteros. Se escriben de la forma $\frac{a}{b}$, donde b ≠ 0. El símbolo para racional es **Q**. Los números racionales son exactos o periódicos cuando se escriben en su forma decimal. En este conjunto podemos encontrar los siguientes:

1. **Enteros** $\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ estos son: los negativos, el cero y los positivos. El símbolo para representar el conjunto de números enteros es **Z.**
2. **Naturales** $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \ldots\}$ estos son los enteros positivos. El símbolo para representar el conjunto de números naturales es **N**.

Irracionales

Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como una razón de dos enteros. Se compone de números decimales no periódicos y raíces cuadradas no perfectas (no son cuadrados perfectos). El símbolo para representar el conjunto de los números irracionales es **I**.

Tipo de decimal	Racional o Irracional	Ejemplos
Exacto o finito	Racional	0.25 o $\frac{1}{4}$
Periódico (Infinito que tiene un patrón)	Racional	0.66… o $\frac{2}{3}$
No periódico (Infinito que no tiene un patrón)	Irracional	π o 3.14159…. $\sqrt{7}$

Propiedades de los números reales

En algunas ocasiones es conveniente cambiar el orden o la agrupación de los números al llevar a cabo operaciones. Por lo tanto, es importante conocer cuándo es posible hacer los cambios sin alterar el resultado. Estos cambios son posibles por las propiedades de los números reales. Conoceremos algunas de ellas.

Propiedad de clausura de la suma

Si a y b pertenecen al conjunto de los números reales, entonces:

$$a + b \in \mathbb{R}$$

$\in$ este símbolo se lee "pertenece a"

Ejemplos

1. $3 \in \mathbb{R}$ y $-12 \in \mathbb{R} \longrightarrow 3 + -12 = -9 \in \mathbb{R}$

2. $5 \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R} \longrightarrow 5 + p \in \mathbb{R}$

Propiedad de clausura de la multiplicación

Si a y b pertenecen al conjunto de los números reales, entonces:

$$a \bullet b \in \mathbb{R}$$

$\in$ este símbolo se lee "pertenece a"

Ejemplos

1. $8 \in \mathbb{R}$ y $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \longrightarrow 8\left(-\frac{1}{2}\right) = -4 \in \mathbb{R}$

2. $-3 \in \mathbb{R}$ y $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \longrightarrow \sqrt{2} + 3$

Propiedad conmutativa de la suma

Si a y b pertenecen al conjunto de los números reales, entonces:

a + b = b + c

Ejemplos

1. 12 + -15 = -15 + 12
2. 3 + - $\sqrt{5}$ = - $\sqrt{5}$ + 3

Propiedad conmutativa de la multiplicación

Si a y b pertenecen al conjunto de los números reales, entonces:

a • b = b • a

Ejemplos

1. (7) (-6) = (- 6) (7)
2. 4 • $\left(\frac{1}{4}\right)$ = $\left(\frac{1}{4}\right)$ • 4

Propiedad asociativa de la suma

Si a, b y c pertenecen al conjunto de los números reales, entonces:

(a + b) + c = a + (b + c)

Ejemplos

1. 12 + (14 + 7) = (12 + 14) + 7
2. (-2 + $\frac{3}{7}$) + $\frac{2}{5}$ = -2 ($\frac{3}{7}$ + $\frac{2}{5}$)

Propiedad asociativa de la multiplicación

Si a, b y c pertenecen al conjunto de los números reales, entonces:

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

Ejemplos

1. $(-3)\ (-2\sqrt{5}) = (-3 \bullet -2)\sqrt{5}$
2. $(6 \bullet 2)\ 4 = 6\ (2 \bullet 4)$

Propiedad identidad de la suma

Si a pertenece al conjunto de los números reales, entonces:

$$a + 0 = a$$

Ejemplos

1. $2 + 0 = 2$
2. $\sqrt{5} + 0 = \sqrt{5}$

El elemento identidad de la suma es el cero (0). Todo número real que se le sume cero (0) se queda idéntico.

Propiedad identidad de la multiplicación

Si a pertenece al conjunto de los números reales, entonces:

$$a \bullet 1 = a$$

1. $(8) \bullet 1 = 8$
2. $X \bullet 1 = X$
3. $\sqrt{7} \bullet 1 = \sqrt{7}$

El elemento identidad de la multiplicación es el uno (1). Todo número real que se multiplique por uno (1) se queda idéntico.

Propiedad del inverso aditivo (opuesto)

Un número sumado a su inverso aditivo u opuesto da como resultado cero (0).

a + - a = 0

Ejemplos

1. 4 + - 4 = 0
2. $\sqrt{13}$ + - $\sqrt{13}$ = 0

Propiedad del inverso multiplicativo (recíproco)

Un número multiplicado por su inverso multiplicativo o recíproco da como resultado uno (1).

a $\left(\frac{1}{a}\right)$ = 1, donde a ≠ 0.

Ejemplos

1. 2 $\left(\frac{1}{2}\right)$ = 1
2. $\left(\frac{4}{5}\right)\frac{5}{4}$ = 1

Propiedad distributiva

Si a, b y c representan números reales, entonces:

a (b + c) = a • b + a • c

a (b – c) = a • b – a • c

Ejemplos

1. 3 (2 + 5) = 3(2) + 3(5)
2. (- 7 + $\frac{1}{2}$) $\sqrt{5} = -7\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Ejercicios de Práctica 1

A. Clasifica como racional (Q) o Irracional (I).

1. $\sqrt{10}$ ____
2. -4 ____
3. $\sqrt{25}$ ____
4. $1.646\overline{464}\ldots$ ____
5. $21.465894301\ldots$ ____
6. $\frac{3}{7}$ ____
7. 52 ____
8. $-\sqrt{3}$ ____
9. $-\frac{1}{2}$ ____
10. $0.18\overline{18}\ldots$ ____

B. Identifica cuál propiedad de los números reales se ilustra en los siguientes enunciados.

enunciado – oración matemática

1. 2 (13 + - 8) = 26 + - 16 ________________
2. – 53 + 53 = 0 ____________________
3. $-\frac{11}{5} \bullet -\frac{5}{11} = 1$ __________________
4. 2 (5 + π) = (5 + π) 2 __________________
5. 9 + (3 + 5) = 9 + (5 + 3) __________________
6. 3,456 + 0 = 3,456 __________________
7. $[(12)(-13)]\,(-20) = 12\,[(-13)(-20)]$ __________________

C. Escribe cierto o falso (C o F).

____ 1. Un número real no puede pertenecer a los racionales y a los irracionales a la vez.

____ 2. $\pi \in Q$

____ 3. Algunos números irracionales no tienen inverso aditivo.

____ 4. Z es un subconjunto de Q.

____ 5. $3.14 \in I$

____ 6. Todo número entero es un número racional.

____ 7. $0.33\overline{33}\ldots \in Q$

____ 8. Algunos números naturales son enteros.

____ 9. $2 \in Z$

____10. Las fracciones son números racionales.

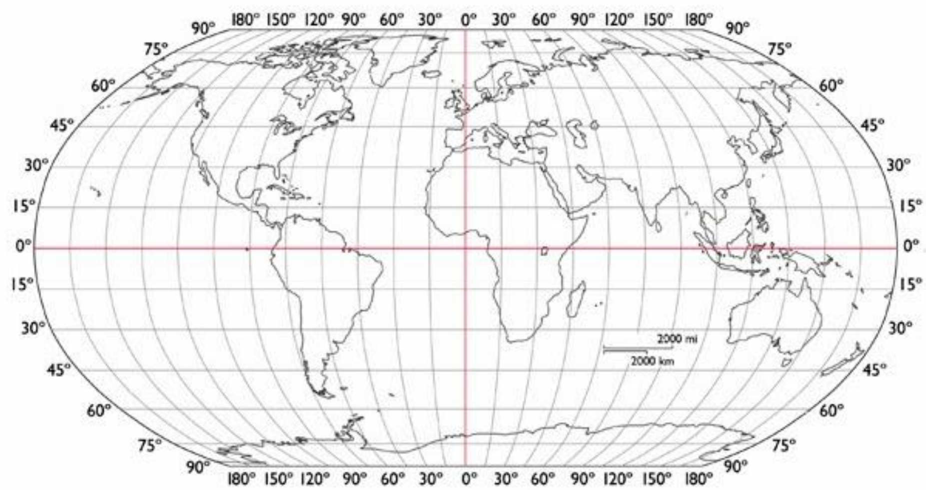
Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

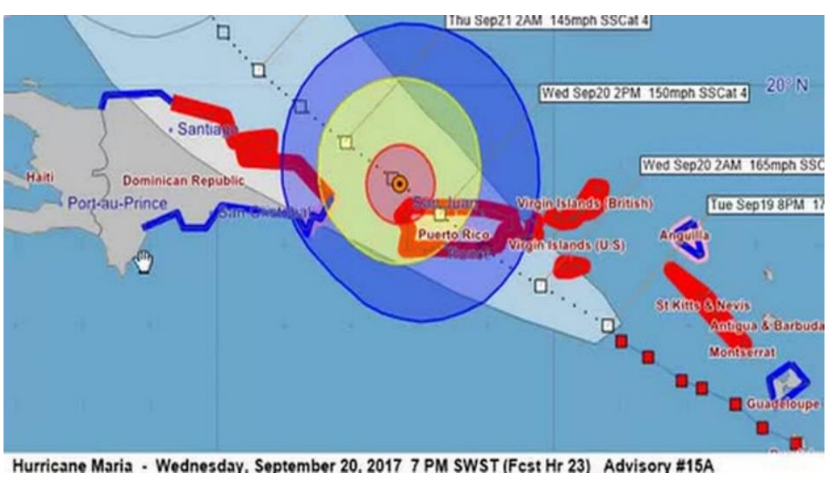
Lección 2: Medidas en Planos Cartersianos

A través del uso de un plano cartesiano se puede construir un mapa con precisión que pone en relación muchas ubicaciones. A partir de un punto de origen que encuentren las personas en el mapa pueden ubicarse con las coordenadas cartesianas que poseen. La aplicación del plano cartesiano ha evitado que muchas personas se desvíen de su destino.

Los sistemas GPS (siglas de Global Positioning System o Sistema de Posicionamiento Global) utilizan el plano cartesiano para dar precisión a las ubicaciones que exponen.

De igual manera, podemos aplicar el plano cartesiano cuando ubicamos la posición de un huracán o tormenta si conocemos la longitud y la latitud.

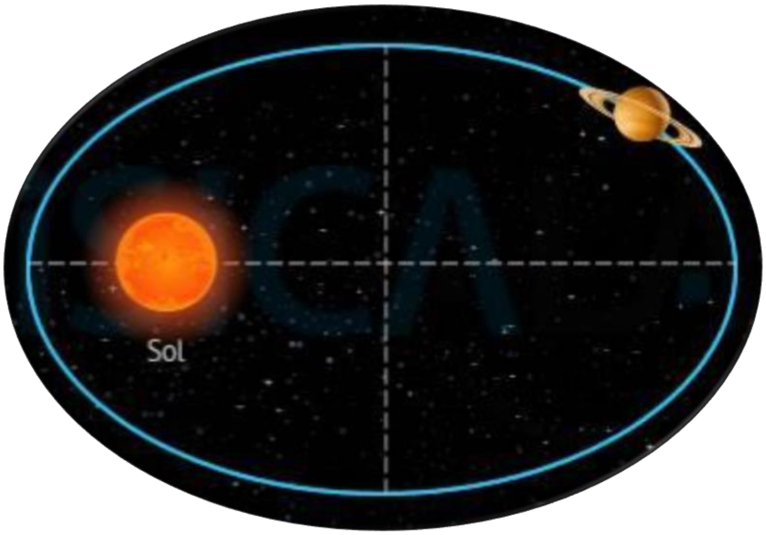




Hurricane Maria - Wednesday, September 20, 2017 7 PM SWST (Fcst Hr 23) Advisory #15A

En la rama científica de la física el uso del plano cartesiano es de gran relevancia ya que permite exponer o graficar el movimiento de un cuerpo, su aceleración y su velocidad. Sin el uso de este plano se dificultaría en gran medida el estudio de los cuerpos en movimiento.

En la astronomía se hace uso de los sistemas de coordenadas que se crean a partir del plano cartesiano para realizar un posicionamiento preciso de los cuerpos celestes, estos pueden ser tanto estrellas como planetas.

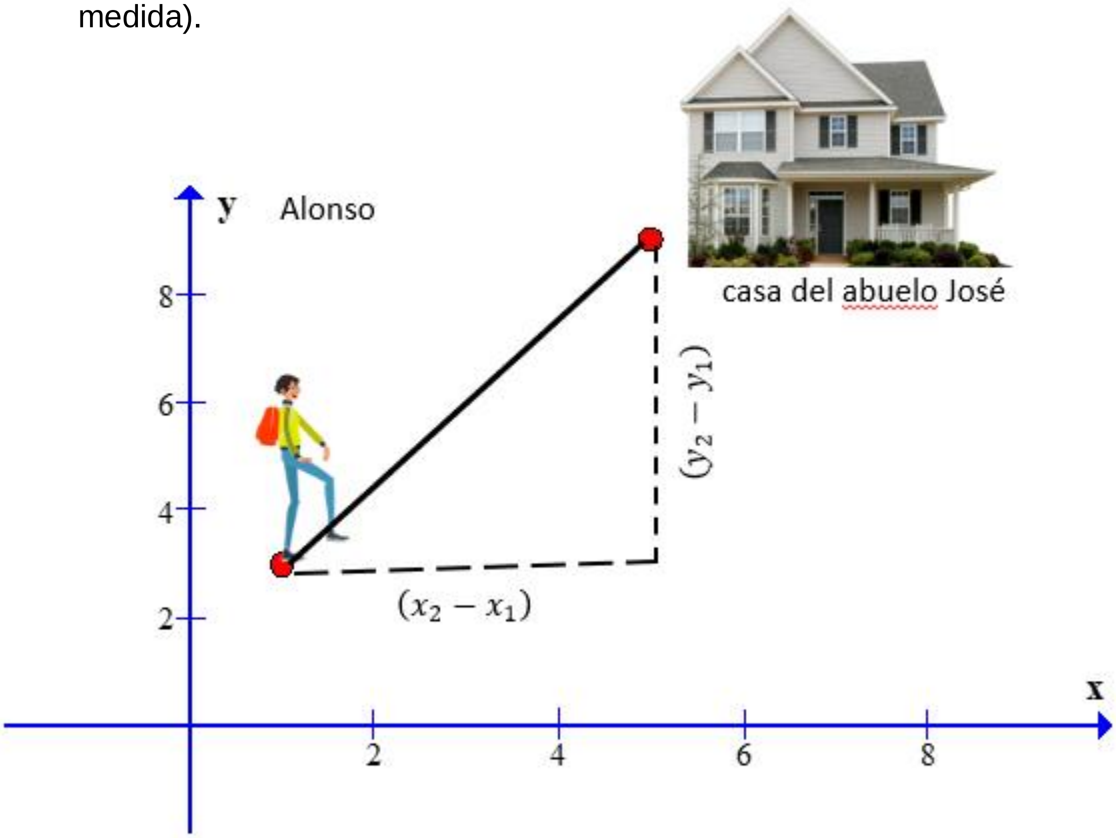


Sin ninguna duda, el uso de esta invención de René Descartes ha tenido gran relevancia hasta el día de hoy y ha facilitado nuestra vida diaria, el hecho de que este plano pueda ser aplicado en tantas ramas de la ciencia revela que la sociedad ha podido hacer buen uso de esta herramienta creada siglos atrás.

Un punto en el plano de coordenadas se representa mediante las coordenadas (x, y), lo cual se conoce como par ordenado. La x representa la distancia del punto (x,y) al eje vertical, el eje de y; mientras que la y representa la distancia del punto (x,y) al eje horizontal, eje de x. Los puntos se localizan partiendo del origen (0,0); primero, mediante un movimiento horizontal y luego de forma seguida, mediante un movimiento vertical, según los valores del punto (x,y).
En un par ordenado, la x se conoce como abscisa y la y se conoce como la ordenada.

La distancia entre dos puntos

Alonso debe llegar a la casa de su abuelo José antes de que comience a llover. ¿A qué distancia se encuentra Alonso de la casa de su abuelo? (Usa km como unidad de medida).



Para determinar la distancia entre dos puntos se utiliza la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 \; - \; x_1\,)^2 + (y_2 - y_1)}$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + \; (9-3)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + \; 6^2}$$

$$= \sqrt{16+36}$$

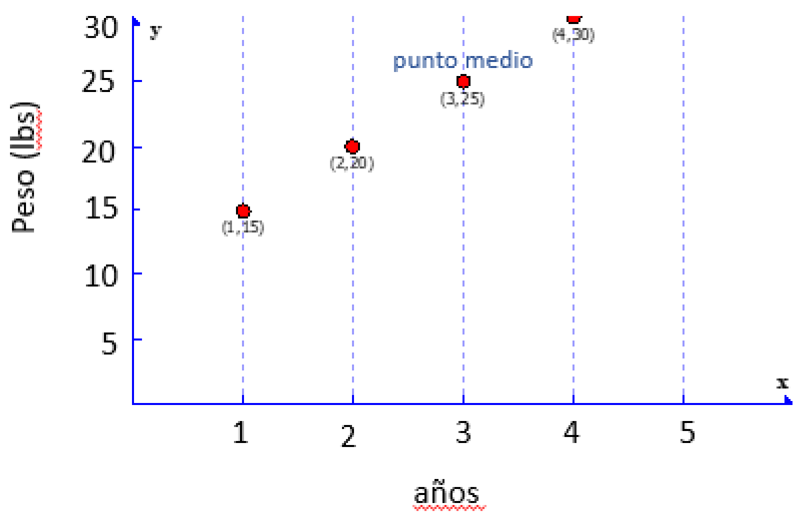
$$= \sqrt{52}$$

$$\approx 7.21 \text{ (aproximadamente)}$$

La distancia que debe recorrer Alonso para llegar a la casa de su abuelo y evitar mojarse con la lluvia es 7.21 km aproximadamente

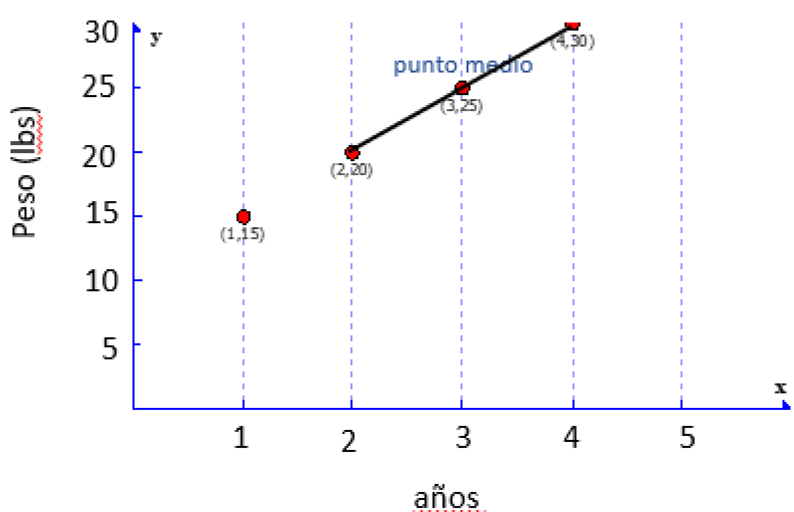
El punto medio

En el siguiente sistema de coordenadas se nos presenta información que relaciona la edad en años de un niño y su peso en libras.



Se ilustra el punto medio entre las coordenadas (4, 30) y (2, 20)

¿Podrías estimar, en el ejemplo anterior, el peso del niño al tercer año? Si unes el punto (2, 20) y el punto (4, 30) con un segmento, podrás notar que lo que se pide es el punto medio de ese segmento.



Recuerda

En cada punto, el valor de x representa una distancia horizontal, así que, para obtener el valor de x del punto medio, debes sumar los valores de x de los puntos extremos y dividirlos entre dos. Para determinar el valor de y se trabaja de manera similar, se suman los valores de y de los puntos extremos y se divide entre dos.

PM significa punto medio

$$PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

(x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los puntos extremos del segmento.

Ejemplo

Hallar el punto medio entre los puntos:

a) (2, 3) y (- 3, 7)

$$\text{PM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{2 + -3}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{10}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, 5\right)$$

b) (0, 7) y (- 8, 5) =

$$\text{PM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{0 + -8}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = \left(\frac{-8}{2}, \frac{12}{2}\right) = (-4, 6)$$

Si la comprensión del contenido de esta lección se te hace difícil, debes solicitar ayuda a nuestros familiares, amigos o maestros.

Ejercicios de Práctica 2

A. Encuentra la distancia entre los dos puntos. Redondear a dos lugares decimales.

1. (-2, 3) y (8, -5)
2. (0, 0) y (3, 5)
3. (3, 0) y (14, 0)
4. (0, 2) y (8, 0)
5. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y (2, 3)

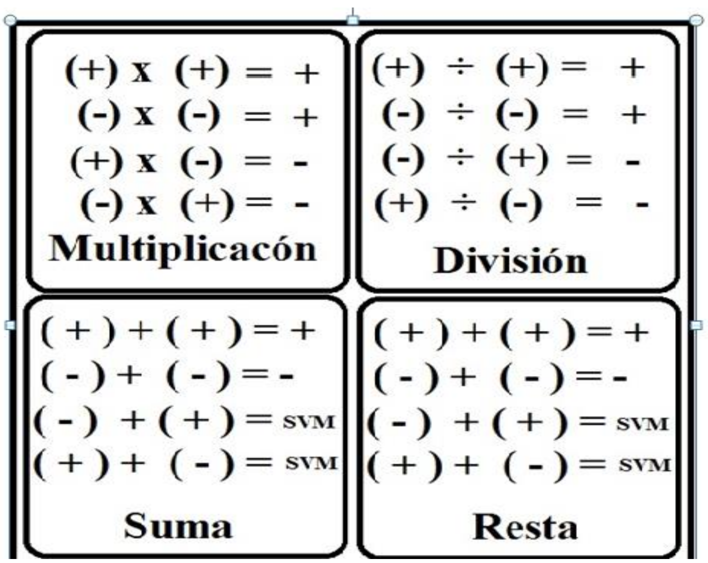
B. Resuelve

Determina si el punto (3, 4) está sobre la circunferencia con centro (0, 0) y radio 3, en su interior o en el exterior de ella.

C. Hallar el punto medio entre los siguientes pares de puntos.

1. (3, -4) y (4, -3)
2. (0, 0) y (-24, 42)
3. (7, 9) y (5, 1)
4. (-6, 8) y (-10, 8)
5. (2, 2) y (12, 18)

No olvides aplicar las reglas de los enteros. SVM significa que el signo será el del número con valor absoluto mayor.



Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

Prueba 1: Los números reales y medidas en el plano cartesiano (53 pts.)

A. Escribe una X que indique a qué conjunto pertenecen los siguientes números: 25 puntos (cada espacio correcto con X o sin X, vale 1 punto)

Número	N	Z	Q	I	R
2.75					
$\sqrt{13}$					
-8					
$\frac{4}{9}$					
3.687912…					

N-natural Z- entero Q-racional I- irracional R-real

B. Parea la expresión aritmética con la propiedad que la justifica. (7 pts.)

____ 1. 38 + 0 = 38	a. clausura de la suma
____ 2. 18 + (3 + 15) = (3 + 15) = 18	b. conmutativa de multiplicación
____ 3. 75 ϵ R y -25 ϵ R, entonces 50 ϵ R.	c. asociativa de la suma
____ 4. 14 (-3) ($\sqrt{2}$) = -3 (14) $\sqrt{2}$	d. elemento identidad de la suma
____ 5. (5π) $\sqrt{2}$ = 5 (π $\sqrt{2}$)	e. inverso multiplicativo
____ 6. $\pi \cdot \frac{1}{\pi}$ = 1	f. asociativa de multiplicación
____ 7. (- 32 + 18) + 15 = - 32 + (18 + 15)	g. conmutativa de la suma

Nota: R se refiere al conjunto de los números reales.

C. Halla la distancia entre los siguientes pares de puntos. Redondea la respuesta a dos lugares decimales (9 pts.)

1. (4, 6) y (-2, 7)
2. (-5, 0) y (-5, 3)
3. (-2, -6) y (7, 3)

D. Resuelve (6 pts.)

1. Determina si el punto (-3, 2) está sobre la circunferencia con centro (2,1) y radio 5, en su interior o en el exterior de ella. (3 pts.)

2. Determina si los siguientes puntos pueden ser los vértices de un triángulo rectángulo: (3 pts.)
   (3, 2), (4, 4) y (1, -2)

E. Halla el punto medio entre los siguientes pares de puntos. (6 pts.)

1. (13, 8) y (5, 2)

2. $\left(\frac{3}{8},\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{5}{2,},\frac{1}{3}\right)$

Lección 3 Gráficas de ecuaciones en dos variables

Las ecuaciones con dos variables por lo general utilizan x y y. Las soluciones de estas ecuaciones pueden representarse en un plano cartesiano, lo que se conoce como gráfica de la ecuación.

Ejemplos de ecuaciones en dos variables:

$y = x + 1$	$y = x^2$	$y = x^3 – 5$
$y = 2x – 6$	$y = x^2 – 3$	$4y = x^4 + 1$
$4x + y = - 7$	$8y + x^2 = 12$	(los ejemplos son infinitos)
$3(x + y) = 9$	$y = x^2 – 5x -14$	

Para dibujar la gráfica de las ecuaciones en dos variables se toma una muestra representativa de las soluciones o puntos. De esta manera, se tendrá una idea de la forma de la gráfica. Los puntos están compuestos de coordenadas (x, y), los cuales son números reales. Estos números son infinitos por lo que se toma una muestra de ellos. La muestra de números que utilicemos la vamos a colocar en una tabla de valores para que la construcción de la gráfica sea más sencilla.

¿Cuáles son los valores o números que podemos utilizar como muestras?

Se puede utilizar cualquier número real. Se recomienda utilizar por lo menos cinco (5) puntos, dos de ellos negativos, el cero y los otros dos positivos.

Veamos algunas ecuaciones y cómo se dibuja la gráfica.

Ejemplos

1. $y = 2x + 3$ x es la variable independiente, por eso se le da cualquier valor

y es la variable dependiente (depende del valor de x)

x	y
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7

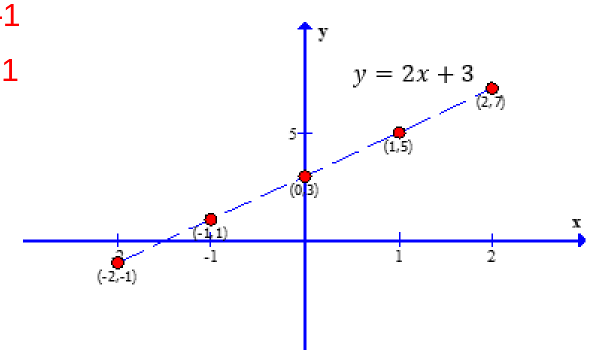
Si x = -2 $y = 2 (-2) +3 = -4 + 3 = -1$

Si x = -1 $y = 2 (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$

Si x = 0 $y = 2 (0) + 3 = 0 + 3 = 3$

Si x = 1 $y = 2 (1) + 3 = 2 + 3 = 5$

Si x = 2 $y = 2 (2) + 3 = 4 + 3 = 7$



2. $y = x^2 - 1$ (x tiene un exponente igual a 2, lo que significa que es una ecuación de grado 2 o cuadrática)

x	y
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

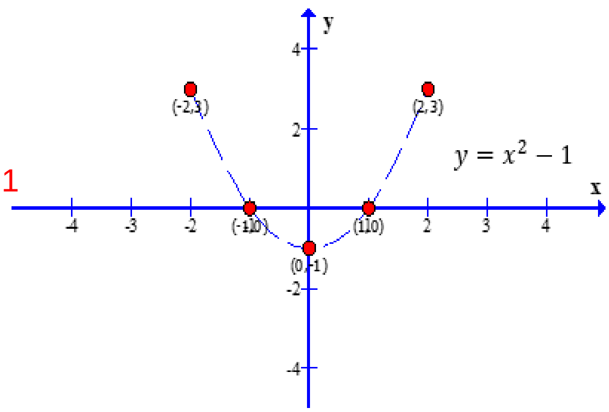
Si x = -2 $y = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

Si x = -1 $y = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

Si x = 0 $y = (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

Si x = 1 $y = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

Si x = 2 $y = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$



3. $y = x^3 - 57$ (x tiene un exponente igual a 3, lo que significa que la ecuación es de grado 3 o cúbica)

x	y
-2	-15
-1	-8
0	-7
1	-6
2	1
3	20

Si x = -2 $y = (-2)^3 - 7 = -8 - 7 = -8 + -7 = -15$

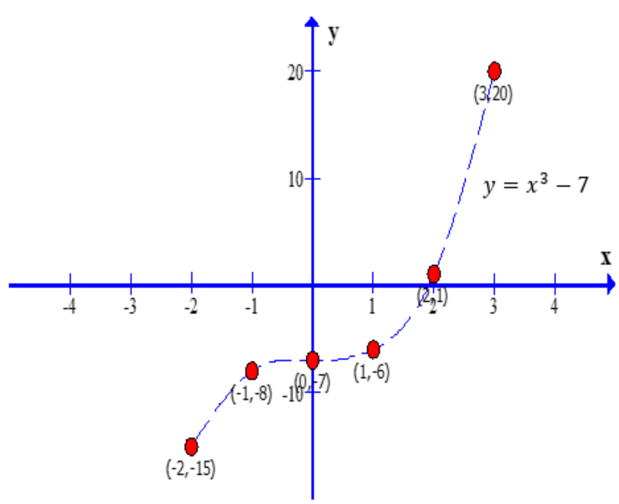
Si x = -1 $y = (-1)^3 - 7 = -1 - 7 = -1 + -7 = -8$

Si x = 0 $y = (0)^3 - 7 = 0 - 7 = 0 + -7 = -7$

Si x = 1 $y = (1)^3 - 7 = 1 - 7 = 1 + -7 = -6$

Si x = 2 $y = (2)^3 - 7 = 8 - 7 = 1$

Si x = 3 $y = (3)^3 - 7 = 27 - 7 = 20$



Es importante señalar que cuando damos valores a x para evaluar y obtener los valores de y, es conveniente que la ecuación esté "despejada" para y. Esto significa, que debemos tener la variable y sola en uno de los lados de la ecuación. Por lo general, dejamos la variable y sola en el lado izquierdo. Si la ecuación no está despejada para y, entonces debemos aplicar las propiedades necesarias para hacerlo.

Ejemplos

Despejar para y

1. 6y = 12x + 24 dividir ambos lados de la ecuación entre 6 o multiplicar por el recíproco de 6 (propiedad del inverso multiplicativo)

$$6y = 12x + 24$$
$$\frac{6}{6}y = \frac{12}{6}x + \frac{24}{6}$$
$$y = 2x + 4$$

2. 4x + 2y = 20 mover 4x al lado derecho cambiándole el signo a su opuesto (propiedad del inverso aditivo), luego dividir ambos lados de la ecuación entre 2

$$4y + 2y = 20$$
$$2y = -4x + 20$$
$$\frac{2}{2}y = -\frac{4}{2}x + \frac{20}{2}$$
$$y = -2x + 10$$

3. 3 – x^2 = - y mover -y para el lado izquierdo cambiando el signo y mover el 3 y $-x^2$ para el lado derecho cambiando el signo

$$3 - x^2 = -y$$
$$y = x^2 - 3$$

4. $8x^3$ + 2y = -14 mover al $8x^3$ al lado derecho con el signo opuesto, luego se divide entre 2

$$8x^3 + 2y = -14$$
$$2y = -8x^3 - 14$$
$$\frac{2}{2}y = -\frac{8}{2}x^3 - \frac{14}{2}$$
$$y = -4x - 7$$

Interceptos en los ejes

Los puntos donde la gráfica cruza o interseca los ejes en el plano cartesiano se conocen como interceptos. No siempre las gráficas tienen interceptos con los ejes. Pero, si buscamos los interceptos, entonces tendremos información importante para construir la gráfica de la ecuación.

¿Cómo podemos encontrar los inceptos en x y en y?

Intercepto en x

Para encontrar los interceptos en x se iguala la y a cero (0) en la ecuación (y = 0) y se resuelve para x. Algunas ecuaciones no tienen interceptos en x. La coordenada de y en el intercepto con el eje de x es 0.

Ejemplos: Encuentra interceptos en x.

1. $y = 5x + 4$ igualar la y a cero (0)

   $0 = 5x + 4$ despejar para x (cambiar el signo al mover el 4 a la izquierda)

   $0 - 4 = 5x$ dividir ambos lados entre 5

   $-\frac{4}{5} = \frac{5x}{5}$

   $-\frac{4}{5} = x \;\; o\ sea\ x = -\frac{4}{5}$

   El punto de intercepción de la gráfica de la ecuación con el eje de x es $\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$

2. $y = x^2 + 7x + 12$ igualar la y a cero (0)

   $x^2 + 7x + 12 = 0$ esta expresión cuadrática se puede factorizar

   $(x + 3)(x + 4) = 0$ es una multiplicación de dos factores. Para que una multiplicación sea cero (0) uno de los factores es cero o ambos factores. Por lo tanto, se igualan ambos factores a cero (0) y se resuelve de manera individual.

   $x + 3 = 0 \qquad x + 4 = 0$

   $x = -3 \qquad x = -4$

La gráfica de esta ecuación tiene dos puntos de intercepción con el eje de x, estos son: $(-3,0)\ y\ (-4,0)$.

Interceptos en y

Para encontrar los interceptos en y se iguala la x a cero (0), esto es x = 0, y se resuelve para y.   No siempre las ecuaciones tienen intercepto en y.

Ejemplos: Encuentra el intercepto en y.

1. $y = 5x + 4$ igualar la x a cero (0)

   $y = 5(0) + 4$ resolver

   $y = 0 + \ \ 4$ resolver

   $y = 4$

   El punto de intercepción de la gráfica de la ecuación con el eje de y es $(0{,}4)$.

2. $y = \ x^2 + 7x + 12$ igualar la x a cero (0)

   $y = \ (0)^2 + 7(0) + 12$ resolver

   $y = \ 0 + 0 + 12$ resolver

   $y = \ 12$

   El punto de intersección de la gráfica de la ecuación con el eje de y es $(0{,}12)$.

Fórmulas para factorizar polinomios	
Factor común	$ax + bx = x(a+b)$
Factor común por agrupación de términos	$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
Trinomio cuadrado perfecto	$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	$x^2 + bx + c = (x+r)(x+s)$ donde $r = a + b \wedge s = ab$
Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c = (px+r)(qx+s)$ donde $a = pq,\ b = ps + qr \wedge c = rs$
Cubo perfecto	$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$

Recuerda:

Repasa la factorización para resolver ecuaciones con dos variables

Ejercicios de Práctica 3

A. Dibuja la gráfica de cada ecuación. (Puedes usar papel cuadriculado)

1. $y = 2x - 3$
2. $2y = 8x + 10$
3. $y = x^2 + 4$
4. $y = 2x^2 - 3$
5. $24x + 12y = -36$
6. $y = x^3 + 1$

B. Encuentra los interceptos en x y en y.

1. $21x - 3y = 18$

2. $y = x^2 + 6x + 9$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

Estados Unidos se compone de 50 estados y varios territorios. Cada estado contiene una sola capital. Si llamamos dominio a los 50 estados y campo de valores o rango a las capitales, entonces a cada elemento del dominio se le asigna exactamente un elemento del campo de valores. Este tipo de relación se conoce como **función**.

Dominio	**Campo de valores o rango**
Alabama	Montgomery
Arizona	Phoenix
Colorado	Denver
Florida	Tallahassee
Georgia	Atlanta
Illinois	Springfield
Indiana	Indianápolis
Massachusetts	Boston
Nueva York	Albany
Ohio	Columbus
Texas	Austin
Wisconsin	Madison

Estos son algunos ejemplos

Una función f es una relación entre un conjunto dado X (el dominio) y otro conjunto de elementos Y (el campo de valores o rango) de manera tal que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del campo de valores o rango.

Notación funcional

La función se denota de la siguiente manera:

$f(x)$ se lee f de x o sea, el valor de la función f asociado al número x. En las funciones, $f(x)$ representa la y de una ecuación.

Las funciones describen fenómenos cotidianos, económicos, psicológicos, científicos, entre otros. Estas funciones se obtienen experimentalmente por medio de la observación. *

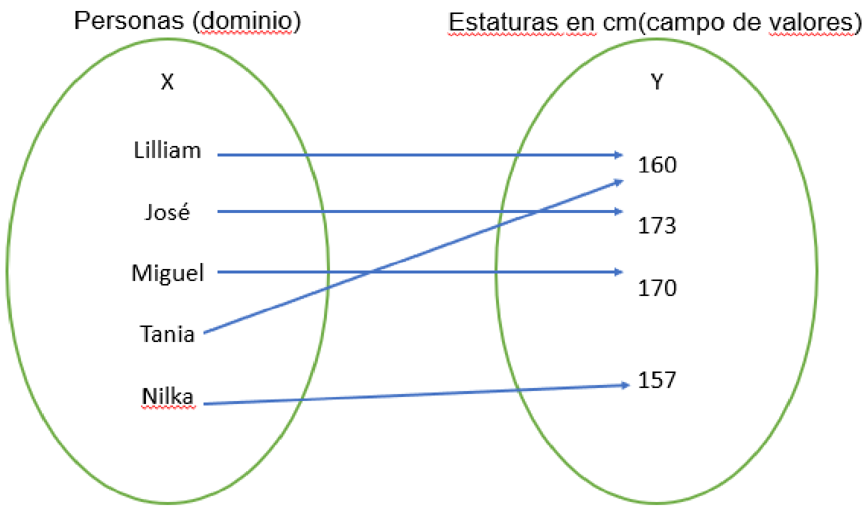
Ejemplo

Sea x el conjunto de personas y y el conjunto de números que representan medidas de la estatura de esas personas en un instante en específico.

Define f como la relación que asigna a cada persona el número que corresponde a sus estatura en centímetros.

¿Es esta una función?

Sí, es una función porque cada persona tiene exactamente una medida para su estatura en centímetros en un instante en específico. Nota que varias personas pueden medir lo mismo y la relación sigue siendo una función porque **la importancia es que el elemento del dominio no se repita**, esto es, no se asigne dos valores distintos a un mismo elemento del dominio.



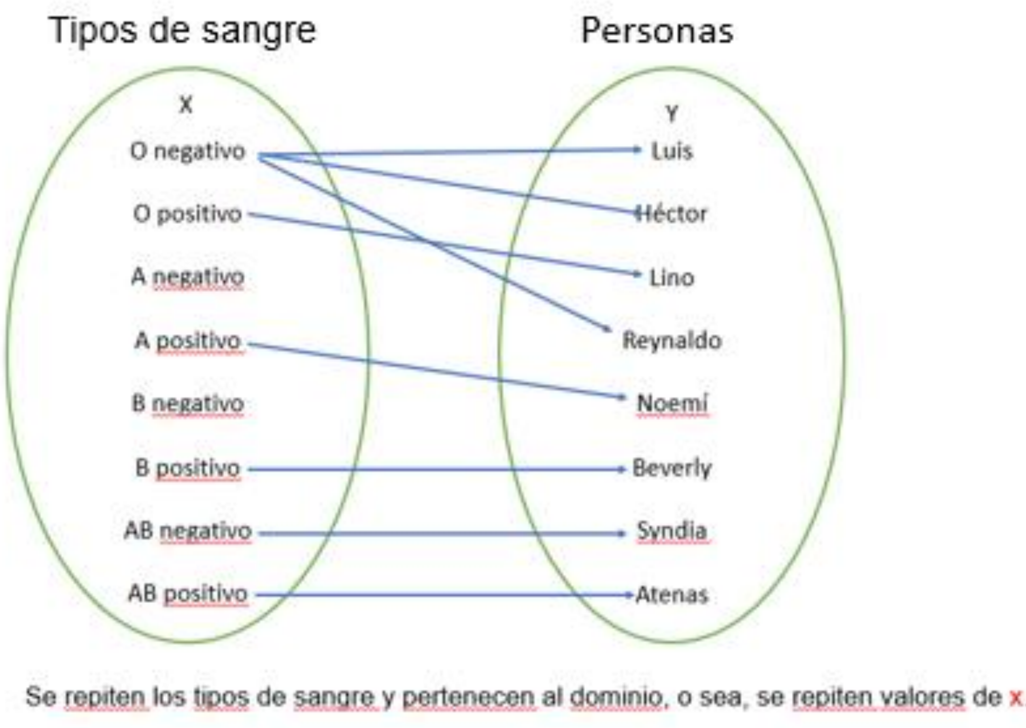
No se repiten las personas, solamente se puede repetir la estatura, o sea, el valor de y

Ejemplo

Consideremos el dominio formado por el conjunto de tipo de sangre y el campo de valores por un conjunto de personas. Define *f como* la relación que asigna a cada tipo de sangre una persona que tenga ese tipo de sangre.

¿Es una función?

En este caso la relación **no es una función,** ya que existen muchas personas con el mismo tipo de sangre.



No olvides, para que una ecuación sea una función no se puede repetir el valor de x.

Todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones. Una relación es un conjunto de pares ordenados.

Determinar si una gráfica es una función

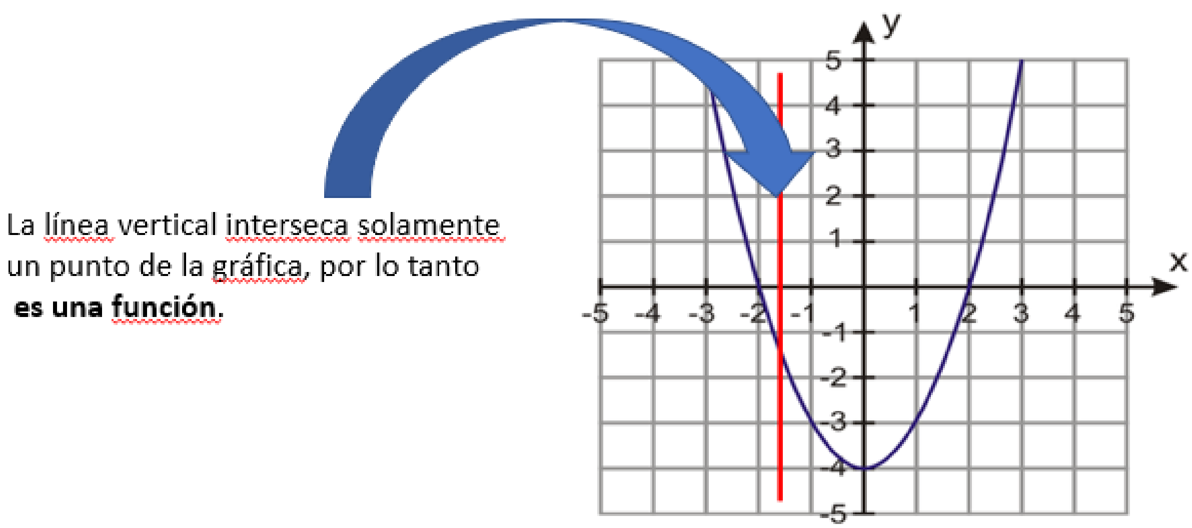
Suponer que tenemos la gráfica de una relación, ¿cómo podemos determinar si es una función o no?

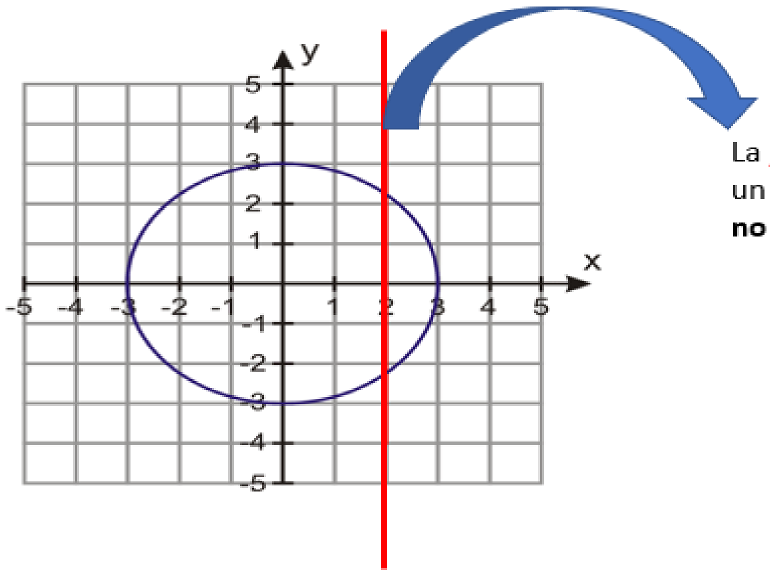
Podemos organizar los pares ordenados en una tabla o diagrama de flujo, como se presentó en los ejemplos, similar a la situación de los tipos de sangra y las personas. Este proceso puede tomarnos un poco de tiempo, sin embargo, existe una opción para las gráficas que consiste en realizar la prueba de la línea vertical. Esta prueba nos permite visualizar rápidamente si la gráfica representa una función o no. Estudiemos el siguiente teorema:

Parte A: una relación es una función, siempre que no haya rectas verticales intersecando la gráfica en más de un punto.

Parte B: si una relación graficada no interseca a una recta vertical en más de un punto, entonces la relación es una función.

En otras palabras, una gráfica es una función si al trazar una recta vertical por ella no la interseca en más de un punto.





La línea vertical interseca más de un punto de la gráfica, por lo tanto **no es una función**.

Evaluación de funciones

Consideremos $f(x) = 2x + 5$

¿Qué valor le asigna f a $x = 4$? Esto es equivalente a solicitar: hallar $f(4)$ o evaluar la función cunado $x = 4$.

Entonces, lo que hay que hacer es sustituimos x por el número 4 en $f(x)$ y simplificamos.

$$f(x) = 2x + 5$$
$$f(4) = 2\,(4) + 5$$
$$f(4) = 8 + 5$$
$$f(4) = 13$$

Utilicemos la misma función para determinar: $f(0)$, $f(-1)$ y $f(\frac{1}{2})$.

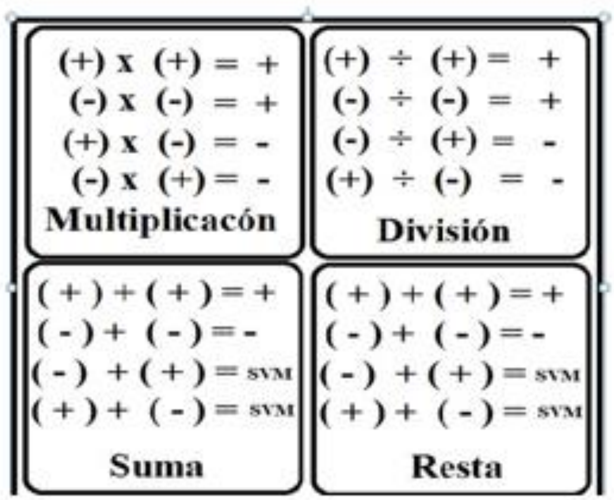
$f(0) = 2\,(0) + 5$	$f(-1) = 2\,(-1) + 5$	$f(\frac{1}{2}) = 2\,(\frac{1}{2}) + 5$
$f(0) = 0 + 5$	$f(-1) = -2 + 5$	$f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{2} + 5$
$f(0) = 5$	$f(-1) = 3$	$f(\frac{1}{2}) = 1 + 5$
		$f(\frac{1}{2}) = 6$

Se pueden utilizar otras letras para nombrar las funciones, en el siguiente ejemplo usamos g.

Ejemplos

Si $g(x)$ = $2x^2 - 3x - 6$, evalúa: $g(0)$, $g(-1)$ y $g(5)$

$g(0) = 2\,(0)^2 - 3\,(0) - 6$	$g(-1) = 2\,(-1)^2 - 3\,(-1) - 6$	$g(5) = 2\,(5)^2 - 3\,(5) - 6$
$g(0) = 2\,(0) - 0 - 6$	$g(-1) = 2\,(1) + 3 - 6$	$g(5) = 2\,(25) - 15 - 6$
$g(0) = 0 - 0 - 6$	$g(-1) = 2 + 3 - 6$	$g(5) = 50 - 15 - 6$
$g(0) = 0 - 6$	$g(-1) = 5 - 6$	$g(5) = 35 - 6$
$g(0) = 0 + -6$	$g(-1) = 5 + -6$	$g(5) = 29$
$g(0) = -6$	$g(-1) = -1$	



Operaciones con funciones

Las funciones, como las expresiones algebraicas, pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. En otras palabras, podemos realizar diferentes operaciones con las funciones.

Suma (adición)	$(f+g)(x)$	$f(x)+g(x)$
Resta (sustracción)	$(f-g)(x)$	$f(x)-g(x)$
Multiplicación	$(f\cdot g)(x)$	$f(x)\cdot g(x)$
División	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$

Ejemplos

Dadas $f(x)=2x+4$ y $g(x)=5x-1$, encontrar:

1. $(f+g)(x)$
2. $(f-g)(x)$
3. $(f\cdot\ g)(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x+4)+(5x-1)=7x+3$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x+4)-(5x-1)=2x+4-5x+1=-3x+5$

$(f\cdot\ g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(2x+4)(5x-1)=10x^2+20x-2x-4=10x^2+18x-4$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x+4}{5x-1}$$

¡Inténtalo!

Dadas $f(x)=x-5$ y $g(x)=\ -3x-10$, encontrar:

1. $(f+g)(x)$
2. $(f-g)(x)$
3. $(f\cdot\ g)(x)$

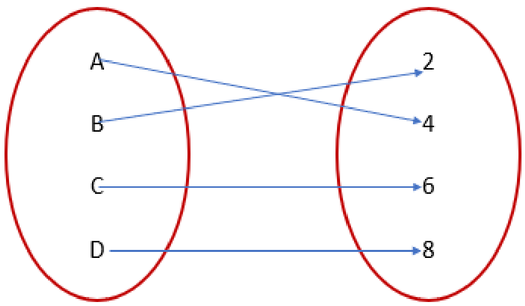
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Ejercicios de Práctica 4

A. Indica el dominio (D) y el campo de valores (CV) de las siguientes relaciones.

1. R = $\left\{(4,-1),(0,6),(10,3),\left(\frac{1}{5},-5\right),(0,0)\right\}$ El dominio de R es:

   El campo de valores de R es:

2. 

   El dominio es:

   El campo de valores es:

3.

x	y
- 2	2
- 1	4
0	6
1	8
2	10

   El dominio es:

   El campo de valores es:

4. A cada número natural se le asigna el doble de sí mismo.

   El dominio es: El campo de valores es:

5. H = $\{(a,b),(e,f),(x,y),(r,s),(h,i),(m,n),(o,p)\}$

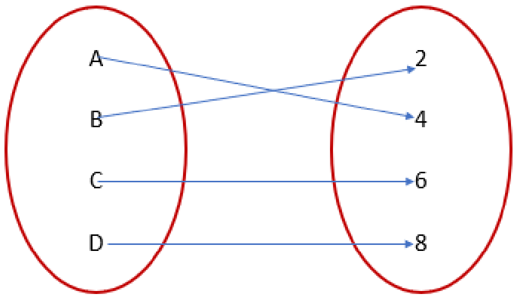
   El dominio de H es:

   El campo de valores es:

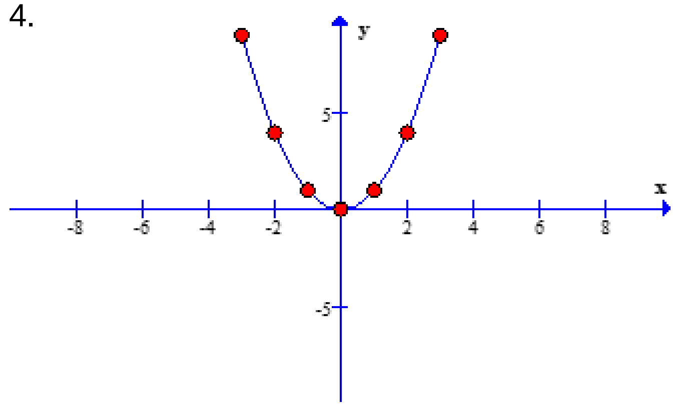
Recuerda que campo de valores es lo mismo que rango

B. Determina si las siguientes relaciones son funciones o no.

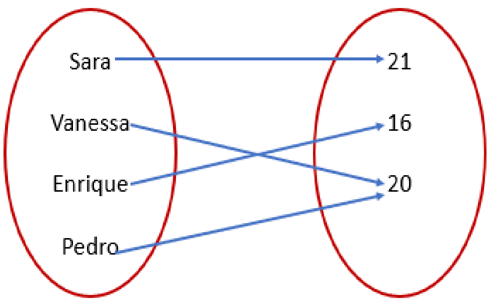
1.



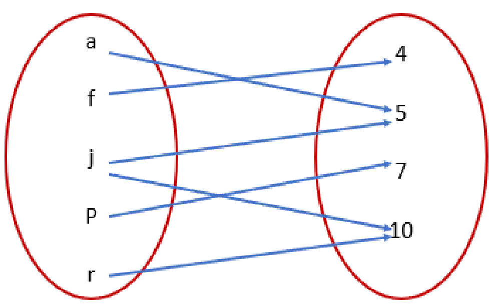
4.



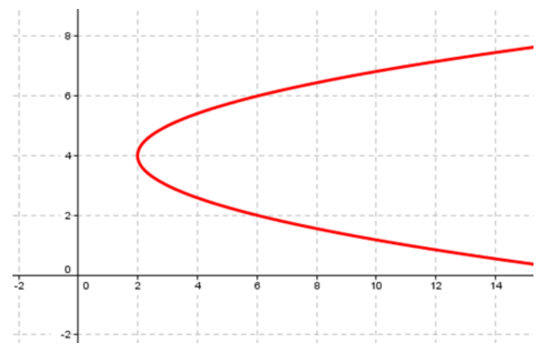
2.



3.



5.



C. Si $f(x) = 12 - 3x$ y $g(x) = x^2 + 2$, evaluar: f(3), f(5), f(0), g(1), g(-2) y g(10).

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

Prueba 2 Ecuaciones con dos variables, interceptos y funciones Valor: 50 puntos

A. Dibuja las gráficas de las siguientes ecuaciones. 20 pts..

1. $y = 3x - 2$
2. $4x + 2y = 8$
3. $y = x^3 - 1$
4. $y = x^2 + 3$

B. Encuentra los interceptos en x y en y de las siguientes ecuaciones. 9 pts.

1. $y = - 4x + 5$
2. $y = x^2 + 3 - 18$
3. $2y = 6x + 4$

C. Determina si los siguientes pares ordenados representan una función. Si no es una función explica tu respuesta. 9 pts.

1. $\{(3,1),(4,8),(3,2),(5,5)\}$
2. $\{(a,f),(b,d),(c,a),(m,g)\}$
3. $\{(Hilda, Enrique),(Yary, Orlando),(Sonia, Edwin),(Andrea, Luis),(Andrea, Diego)\}$

D. Indica el dominio y el campo de valores de los conjuntos de pares ordenados de la parte C. 12 pts.

Ejercicio 1 Dominio:

Campo de valores:

Ejercicio 2 Dominio:

Campo de valores:

Ejercicio 3 Dominio:

Campo de valores:

Lección 5: Familia de funciones

Existe una gran variedad de funciones. Las funciones que pertenecen a la misma familia comparten características clave, que solamente las tienen ese conjunto de funciones. La función madre es aquella más básica en una familia. Las funciones que pertenecen a la misma familia, pero que no son la función madre, son transformaciones precisamente de la función madre. A continuación, se presentan algunas de las familias de funciones, sus gráficas, dominio y campo de valores o rango.

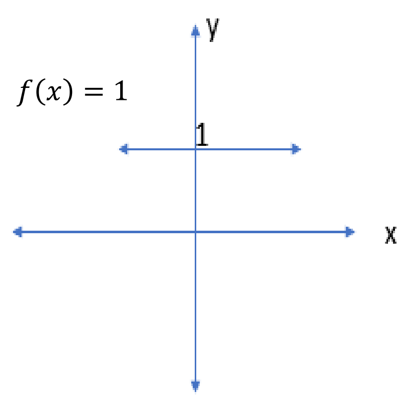
Funciones madre

Familia	Constante	Lineal	Valor absoluto	Cuadrática	Cúbica
Regla	$f(x) = 1$	$f(x) = x$	$f(x) = \|x\|$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$
Dominio	Todos los números reales	Todos los números reales	Todos los números reales	Todos los números reales	Todos los números reales
Campo de valores o rango	$y = 1$	Todos los números reales	$y \geq 0$	$y \geq 0$	Todos los números reales

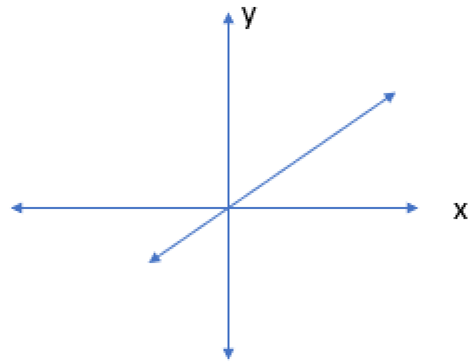
Gráficas de las funciones madre o básicas

$f(x)$ = a

Es una recta horizontal, con intercepto en y igual a 1. Las gráficas de las funciones constantes son rectas horizontales, cuyo intercepto en y es el número a quien le llamamos constante. El campo de valores solamente estará compuesto por la constante. Si la función es $f(x)$ = *a*, el campo de valores será *a*.

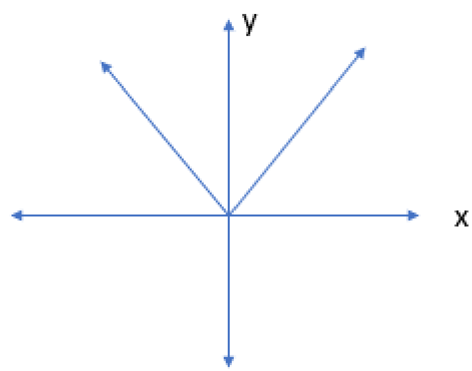


$f(x) = x$



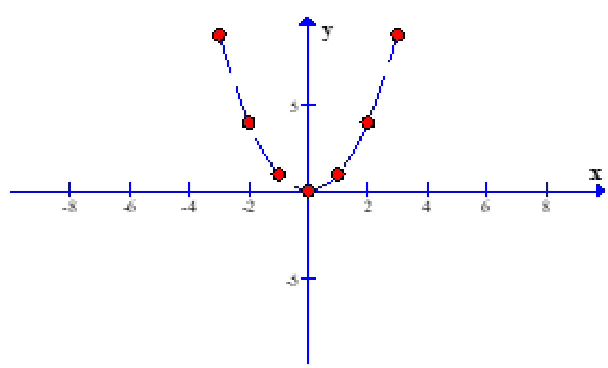
Las gráficas lineales son siempre una línea recta, de ahí su nombre. Esta gráfica básica pasa por el punto (0,0). Todos los números reales pertenecen al dominio porque x puede ser sustituida por cualquier valor real. Al sustituir en la función cualquier valor real en x, producirá un número real en y (igual al de x).

$f(x) = |x|$



La función valor absoluto tiene como dominio cualquier número real, sin embargo, el campo de valores o rango está compuesto por los números mayores o iguales a cero (0). El valor absoluto de un número representa la distancia desde el ce nunca son negativas.

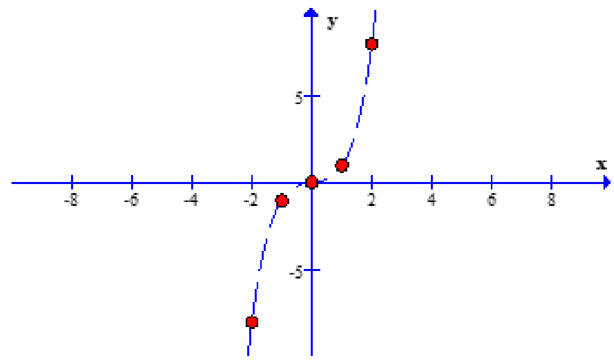
$f(x) = x^2$



Esta gráfica es una parábola que abre hacia arriba y pasa por el punto (0,0). Cualquier valor real puede sustituirse por x, pero el resultado de y será un número mayor o igual que cero (0). Todo número elevado a la segunda potencia o al cuadrado siempre dará resultado un número positivo.

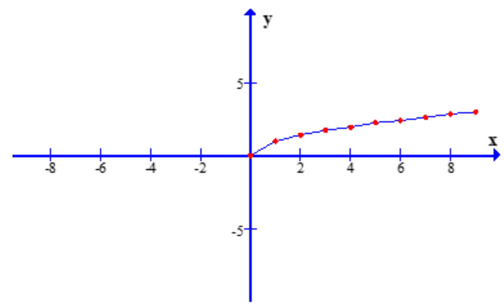
$f(x) = x^3$

Se le conoce como función cúbica básica. La x puede asumir cualquier valor real y la y también. Por eso, el dominio y el campo de valores están compuestos por los números reales.



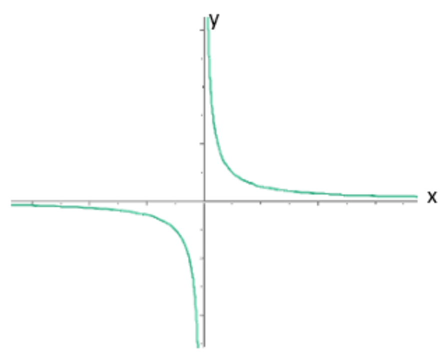
$f(x) = \sqrt{x}$

Se le conoce como función raíz cuadrada básica. La x no puede asumir cualquier valor porque en el conjunto de los números reales no está definida la raíz cuadrada de un número negativo. Solamente buscamos raíces cuadradas de números positivos en los reales. Es por eso que el dominio de la función está compuesto por los números reales mayores o iguales a cero. El campo de valores está compuesto por el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero.



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Se le conoce como función racional básica. La x no puede asumir cualquier valor porque la división por cero no está definida. El denominador de una fracción no puede ser cero, por lo tanto, el dominio está compuesto por todos los números reales excepto el cero. En este tipo de funciones, para determinar el dominio, hay que determinar cuál o cuáles son los números que hacen que el denominador sea cero y lo (s) excluimos del dominio. El campo de valores está formado por todos los números reales excepto el cero.

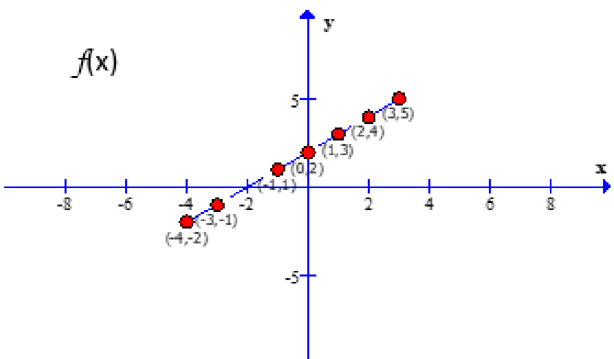


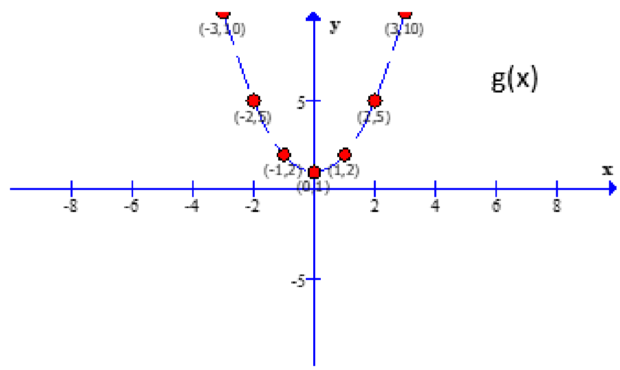
Las curvas que se forman se acercan a los ejes de x y de y, pero no los toca.

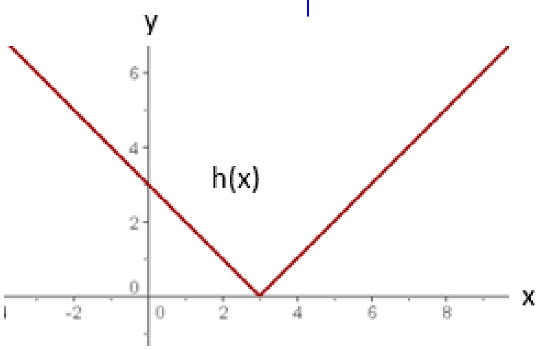
Asíntotas

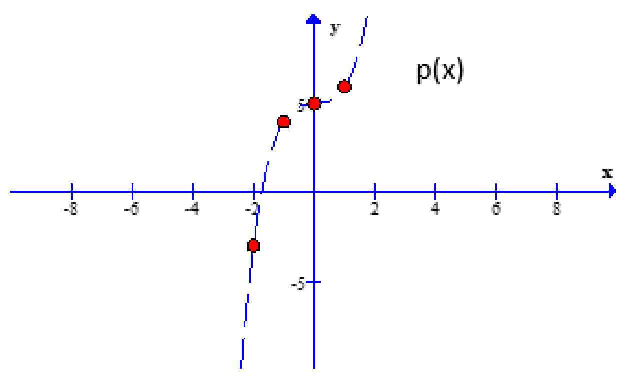
Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va acercando indefinidamente. En el caso de la función racional el eje de x y el eje de y son asíntotas de la función. Las asíntotas pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.

Observemos las siguientes gráficas para compararlas con la función madre o básica









La función f es tiene como gráfica una recta, por lo tanto, pertenece a la familia de las funciones lineales. Podemos observar que se desplaza hacia arriba dos (2) unidades. Cruza o se interseca con el eje de y en el punto (0,2), no en el punto (0,0), como la función madre.

La función g se desplaza hacia arriba una unidad. La gráfica tiene forma de parábola que abre hacia arriba y pertenece a la familia de las funciones cuadráticas.

La función h tiene forma de V, por lo tanto, pertenece a la familia de las funciones valor absoluto. Ser desplaza hacia la derecha tres (3) unidades en comparación con la función madre o básica.

La función p pertenece a la familia de las funciones cúbicas. Se desplaza hacia arriba cinco (50 unidades en comparación con la función cúbica básica. Estos cambios que hemos observado en las funciones en comparación con la función madre es lo que conocemos como transformaciones en las funciones. Una transformación cambia el tamaño, la forma, la posición o la orientación de una gráfica. A continuación, presentamos las transformaciones más comunes en las gráficas de funciones.

Algunos tipos de transformaciones

Traslación – es una transformación que desplaza una gráfica horizontalmente (a la derecha o izquierda) o verticalmente (arriba o abajo), pero no cambia su tamaño, forma u orientación.

Ejemplos

$y = f(x-h)$ traslación horizontal derecha

$f(x) = (x-2)^2$

$y = f(x)+k$ traslación vertical arriba

$f(x) = x-2$

$y = f(x+h)$ traslación horizontal izquierda

$f(x) = (x+2)^2$

$y = f(x)-k$ traslación vertical abajo

$f(x) = x+2$

Reflexión – es una transformación que invierte una gráfica sobre una línea llamada línea de reflexión. Un punto reflejado es la misma distancia desde la línea de reflexión que el punto original, pero en el lado opuesto de la línea.

Ejemplos

f(x) = $-|x-3|$ g(x) = $-x^2$ h(x) = $-(x^3+1)$

Alargamiento y encogimiento vertical – es una transformación que surge cuando se multiplica la función por un número mayor que 1, o mayor que 0 y menor que 1. Cuando el factor es mayor que 1, la transformación es un alargamiento vertical. Cuando el factor es mayor que 0 y menor que 1, entonces es un encogimiento vertical.

Ejemplos

f (x) = $2x$ alargamiento vertical

g(x) = $3|x|$ alargamiento vertical

h(x) = $\frac{1}{3}x$ encogimiento vertical

p(x) = $\frac{2}{5}|x|$ encogimiento vertical

Alargamiento o encogimiento horizontal – es una transformación que surge cuando la variable x se multiplica por algún factor. Esto es $y = f\ (ax)$, $a \neq 1$, a > 0.

Ejemplos:

$f\ (x) = |3x|$ encogimiento horizontal

$m(x) = \sqrt{2x}$ encogimiento horizontal

$h(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$ alargamiento horizontal

$n(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$

Ejemplos de combinaciones de transformaciones

$g(x) = |3x - 3|$ encogimiento horizontal y traslación vertical 3 unidades hacia abajo

$p(x) = 5x^3 + 3$ alargamiento y traslación verticales 3 unidades hacia arriba

$h(x) = 2\sqrt{x-5}$ alargamiento vertical y traslación horizontal 5 unidades hacia la derecha

$d(x) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{-x+2}\right) + 6$ reflexión con respecto al eje de y, encogimiento vertical, traslación horizontal a la izquierda 2 unidades y traslación vertical hacia arriba 6 unidades

Ejercicios de práctica 5

A. ¿A cuál familia pertenecen las siguientes funciones?

1. $f(x) = 2x^2 - 7$
2. $g(x) = |x - 4|$
3. $h(x) = 4x + 6$
4. $d(x) = x^3 + 2$
5. $n(x) = 9$
6. $m(x) = \frac{4}{x+3}$
7. $p(x) = \sqrt{x - 7}$

B. Haz una gráfica de cada función. Luego describe la transformación.

1. $f(x) = x + 3$
2. $g\ (x) = |2x + 5|$
3. $h(x) = -(x^2 - 1)$
4. $r(x) = \frac{1}{x+4}$
5. $k(x) = \sqrt{2(x + 1)}$

C. Dadas $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x^2 + 5x + 6$, encontrar:

1. $(f + g)(x)$
2. $(f - g)(x)$
3. $(f \cdot g)(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Lección 6: Simetría de funciones

En esta sección del módulo vamos a estudiar una de las características más importantes de una función que puede facilitar el estudio de las funciones y sus representaciones gráficas: la simetría. Algunas funciones son simétricas y otras no lo son, en el caso de que la función sea simétrica hay dos tipos de simetría.

Tipos de simetría

1. Simetría con respecto al origen
2. Simetría con respecto al eje de y

Si la ecuación es simétrica con respecto al eje de x no es una

Simetría con respecto al origen también conocida como simetría impar o función impar

Una función tiene simetría impar cuando la función f(-x) = - f(x). Esto significa que, para cada valor de la función en un punto, es el valor opuesto del punto opuesto.

Ejemplo

Determinar si la función es impar.

$f(x) = x^3 - 7x$ Demostremos que: $f(-x) = -f(x)$

Buscar $f(-x)$

$f(-x) = (-x)^3 - 7(-x)$

$f(-x) = -x^3 + 7x$

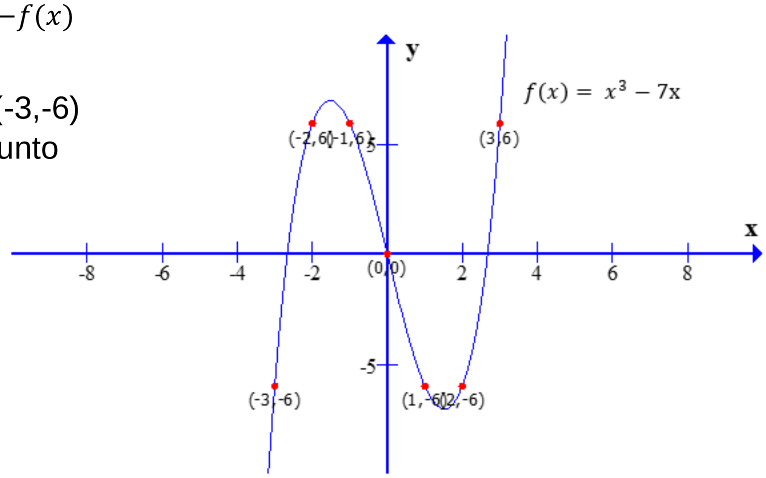
Buscar $-f(x)$

$-f(x) = -(x^3 - 7x)$

$-f(x) = -x^3 + 7x$

$$f(-x) = -f(x)$$

Dos puntos de la gráfica son: (3,6) y (-3,-6) ambas coordenadas en el segundo punto cambian de signo.



Simetría con respecto al eje de y también conocida como simetría par o función par

Una función tiene simetría par cuando la función $f(x) = f(-x)$. Esto es cuando cada valor de la función en un punto coincide con el valor de la función en el inverso.

Ejemplo

Determinar si la función es par.

$f(x) = x^2 + 1$ Demostremos que $f(x) = f(-x)$.

Buscar $f(x)$ (está dada)

$f(x) = x^2 + 1$

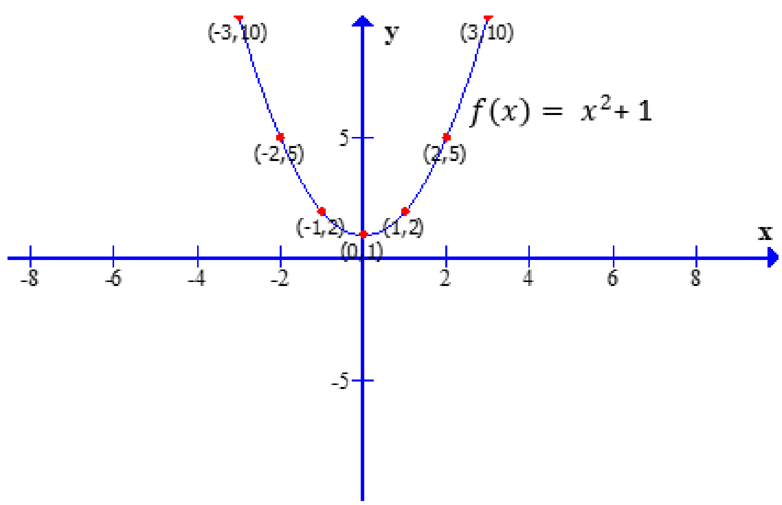
Buscar $f(-x)$

$f(-x) = (-x)^2 + 1$

$f(-x) = x^2 + 1$

Todo número elevado a la segunda potencia da como resultado un número positivo

$f(x) = f(-x)$



Podemos observar que, si doblamos la gráfica por el eje de y, notamos que ambos lados son idénticos, como si se vieran en el espejo (eso es simetría con respecto al eje de y).

Debemos ser cuidadosos al elevar números a diferentes potencias. Esto es multiplicar por el mismo número las veces que indique el exponente. Además, hay que tomar en cuenta las reglas de los enteros (negativos y positivos), debemos repasarlas.

Ejercicios de Práctica 6

A. Determina si la función es par, impar o ninguna. Realiza el procedimiento.

1. $f(x) = -x^2 + 5$

2. $f(x) = x^4 - 5x^3$

3. $f(x) = 2x^5$

4. $f(x) = -x^6 - 10$

B. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3$ y mediante la observación y el análisis determina si la función es par, impar o ninguna. Explica tu respuesta.

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

Prueba 3: Familias de funciones, operaciones, transformaciones y simetría

Total 71 pts.

A. Identifica la familia de las funciones, luego describe la transformación. 16pts.

1. $f(x) = 2x^2$
2. $g(x) = \frac{3}{4}x$
3. $h(x) = 3|x|$
4. $k(x) = 5x + 4$

B. Identifica la familia de funciones, escribe la función madre o básica. Luego describe el dominio y el campo de valores o rango. 16 pts.

1. $g(x) = |x + 2| - 1$
2. $f(x) = -4x + 3$
3. $h(x) = 3x^2 - 2$
4. $f(x) = 7$

C. Dibuja la gráfica de los ejercicios de la parte B. 12 pts.

D. Determina si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna. 15 pts.

1. $f(x) = 4x^3$
2. $g(x) = x^2 + 5x + 1$
3. $h(x) = x^4 + 3x^2 - 2$

E. Dadas $f(x) = x - 1$ y $g(x) = x^2 - 1$, encontrar: 12 pts.

1. $(f + g)(x)$ 2. $(f - g)(x)$

3. $(f \cdot g)(x)$ 4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Lección 7: Función Gaussiana

Carl Friedrich Gauss
1777 - 1855

Existe una gran diversidad de situaciones de la vida real que involucra el uso y aplicación de las funciones.

La función Gaussiana o curva de campana, también conocida como función normal es un modelo matemático que rige muchos fenómenos. También se conoce como distribución normal y es sin duda el modelo más importante en estadística. En realidad, el nombre de "normal" proviene del hecho de que durante un tiempo se creyó, por parte de médicos y biólogos, que todas las variables naturales de interés seguían este modelo. Se conoce como "Gaussiana" en honor a Carl Friedrich Gauss, matemático alemán, quien realizó estudios y formuló la ecuación de la función en forma de campana, conocida como la "campana de Gauss" o simplemente, distribución normal. La experiencia demuestra que las distribuciones de la mayoría de las muestras tomadas en el campo de la industria se aproximan a la función normal si el tamaño de la muestra es grande. Esta función se conoce como función de densidad, la cual permite determinar la probabilidad de que la variable x tome algún valor en un intervalo. Esto no es otra cosa, que el área bajo la curva de la función.

Esta función está definida por dos parámetros: la media μ y la desviación estándar σ. Por eso la distribución normal depende de la media (promedio) y la desviación estándar.

Ejemplos de variables

1. Puntuaciones en exámenes
2. Coeficiente de Inteligencia (IQ)
3. Estatura de las personas
4. Peso de las personas
5. Edad de los empleados de una agencia

¿Qué es la media?

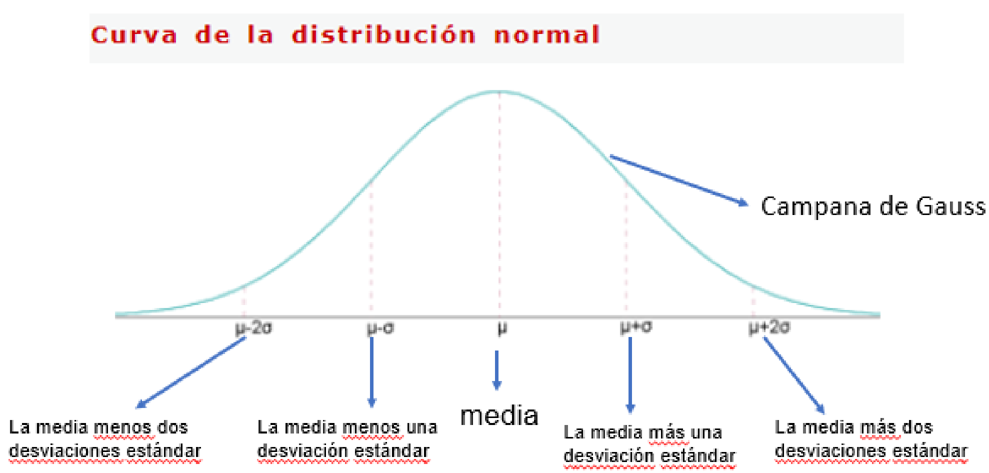
La media es lo que comúnmente conocemos como promedio, el cual se obtiene sumando todos los valores y dividiendo la suma entre la cantidad total de valores.

$$\mu = \frac{suma\ de\ todos\ los\ valores}{total\ de\ valores}$$

μ *significa media o media aritmética de una población*

La desviación estándar **σ** ayuda a conocer de qué manera se agrupan o distribuyen un conjunto de datos respecto a su media. En casi todos los conjuntos de datos, la mayoría de los valores observados quedan dentro de un intervalo de más o menos una desviación estándar por encima y por debajo de la media.

Conocer la media y la desviación estándar ayuda a definir por lo menos dónde se agrupa la mayoría de los valores de los datos. Y, estas agrupaciones las podemos observar en la distribución normal. Cuanto más esparcidos o dispersos están los datos, es mayor la desviación estándar. Cuanto más concentrados u homogéneos son los datos, es menor la desviación estándar.

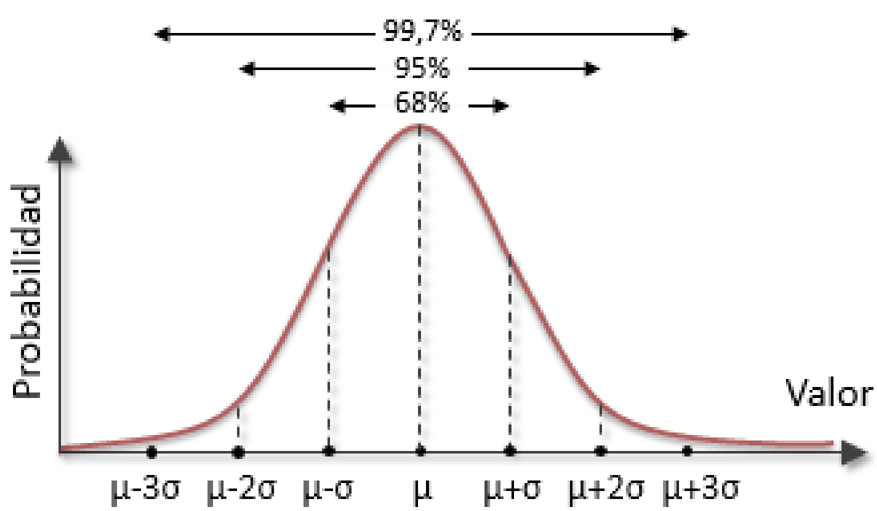


Características de la distribución normal

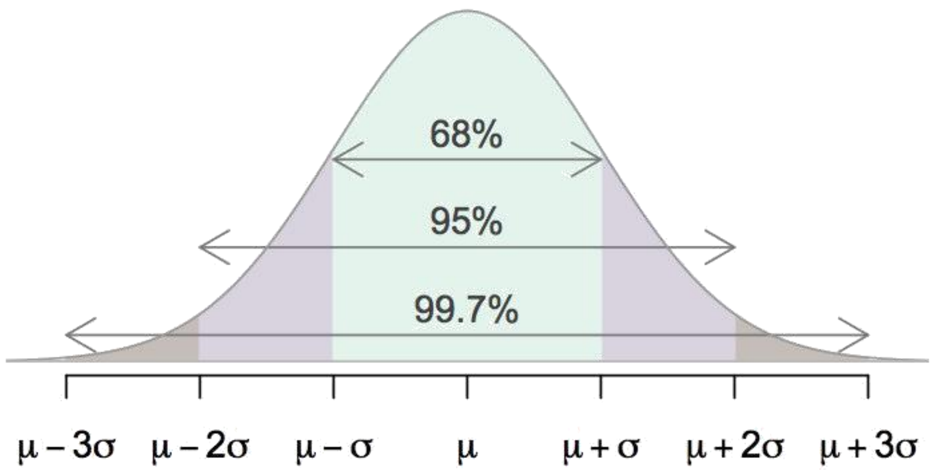
La distribución normal se caracteriza por:

1. Los valores de las medidas tienden a agruparse alrededor de un punto central, la media.
2. La representación de los datos es simétrica a ambos lados de la media.
3. Las desviaciones estándar quedan situadas a igual distancia unas de otras.
4. La proporción de mediciones situada entre la media y las desviaciones es una constante en la que:
   - ✓ la media ± 1 desviación estándar cubre el 68.3% (o 68%) de los casos
   - ✓ la media ± 2 desviaciones estándar cubren el 95.5% (algunas ocasiones se escribe solamente 95%) de los casos
   - ✓ la media ± 3 desviaciones estándar cubren el 99.7% de los casos
5. La curva normal desciende suavemente en ambas direcciones a partir del valor central.
6. Es asintótica, lo que quiere decir que la curva se acerca cada vez más al eje X pero jamás llega a tocarlo. Es decir, las "colas" de la curva se extienden de manera indefinida en ambas direcciones.

Con esta distribución podemos determinar la probabilidad de que un valor (x) esté por encima o por debajo de la media, conociendo ambos parámetros: media y desviación estándar; además, conociendo la probabilidad ya establecida. Esto lo podemos observar en la siguiente imagen.



La probabilidad de que X (el valor) se encuentre a una desviación estándar por abajo o por arriba de la media es 68%. La probabilidad de que X se encuentre a dos desviaciones estándar por abajo o por arriba de la media es 95%. La probabilidad de que X se encuentre a tres desviaciones estándar por abajo o por arriba de la media es 99.7%. Lo anterior se conoce como la Regla Empírica.



La Regla Empírica

En la mayoría de los conjuntos de datos, una gran parte de los valores tienden a agruparse en algún lugar cercano a la mediana. En los conjuntos de datos asimétricos a la derecha, el agrupamiento se presenta a la izquierda de la media, es un valor menor que la media. En los conjuntos de datos asimétricos hacia la izquierda, el agrupamiento se presenta a la derecha de la media, es un valor mayor que la media. En los conjuntos de datos simétricos, donde la mediana y la media son iguales, con frecuencia los valores tienden a agruparse alrededor de la media y la mediana, generando una distribución en forma de campana. Esta clase de distribución utiliza la regla empírica. La regla empírica permite examinar la variabilidad o dispersión. Lo cual significa cuánto se alejan o se acercan los datos a la media o centro.

- ❖ Aproximadamente el 68% de los valores se encuentran a una distancia de 1 desviación estándar de la media.
- ❖ Aproximadamente el 95% de los valores se encuentran a una distancia de

2 desviaciones estándar de la media.

- ❖ Aproximadamente el 99.7% de los valores se encuentran a una distancia de 3 desviaciones estándar de la media.

La regla empírica ayuda a medir cómo se distribuyen los valores por encima y debajo de la media. Esto permite identificar los valores atípicos o extremos cuando se analiza un conjunto de datos numéricos. Estos valores extremos son aquellos que se alejan más de 3 desviaciones estándar de la media.

En las distribuciones con forma de campana, aproximadamente sólo uno de cada 20 valores estará alejado de la media más allá de 3 desviaciones estándar en cualquier dirección.

Ejemplo

La cantidad media de llenado de una población integrada por 12 latas de gaseosa es de 12.06 onzas con una desviación estándar de 0.02. También se sabe que esta población tiene forma de campana. Describa la distribución de la cantidad de llenado de las latas. ¿Existe una gran probabilidad de que una lata tenga menos de 12 onzas de gaseosa?

Solución (debemos sumar y restar las desviaciones estándar a la media)

$\mu \pm \sigma = 12.06 \pm 0.02 = (12.04, 12.08)$

$\mu \pm 2\sigma = 12.06 \pm 2(0.02) = (12.02, 12.10)$

$\mu \pm 3\sigma = 12.06 \pm 3 (0.02) = (12.00, 12.12)$

Es poco probable que una lata de gaseosa tenga menos de 12 onzas

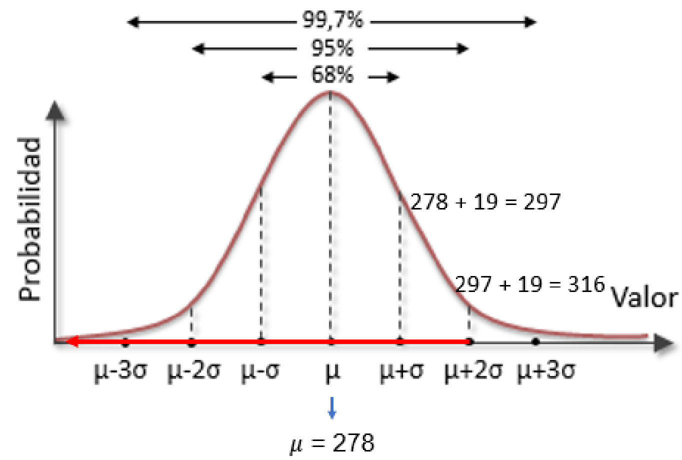
Ejemplo

Una compañía telefónica mantiene estadística sobre la cantidad de mensajes de texto que envían sus clientes cada mes. Según las estadísticas, la cantidad de mensajes enviados por cliente en un mes tiene una distribución normal. Los datos se muestran a continuación.

- La media es de 278 mensajes por mes.
- La desviación estándar es de 19 mensajes por mes.

¿Cuál es la probabilidad de que un cliente envíe MENOS de 316 mensajes en un mes? Usemos la distribución normal para contestar la pregunta.

Solución



$\mu = 278$
$\sigma = 19$

Debemos sumar las desviaciones estándar hasta llegar a 316

Esto es, $\mu + \sigma = 278 + 19 = 297$

$\mu + 2\sigma = 278 + 2(19) = 316$

La flecha roja representa el área bajo la curva o la probabilidad. La probabilidad resulta hasta dos desviaciones estándar por encima de la media, esa porción de la curva es 95%.

La probabilidad de que un cliente envíe MENOS de 316 mensajes en un mes es de 95%.

Distribución normal estándar o curva estándar

Cada una de las distribuciones puede tener una media (μ) o una desviación estándar distinta (σ). Por tanto, el número de distribuciones normales es ilimitado y sería imposible proporcionar una tabla de probabilidades para cada combinación de μ y σ.

Para resolver este problema, se utiliza un solo "miembro" de la familia de distribuciones normales, aquella cuya media es 0 y desviación estándar 1 que es la que se conoce como distribución estándar normal, de forma que todas las distribuciones normales pueden convertirse a la estándar, restando la media de cada observación y dividiendo por la desviación estándar.

Media (μ) es cero (0)

Desviación estándar (σ) es uno (1)

En caso de que la distribución sea normal, pero no estándar, existe un procedimiento para estandarizar los valores de X. Lo cual se hace para comprender mejor dónde están ubicados los valores en la curva normal y analizar cuánto se aleja o cuánto se acerca un valor con respecto a la media o centro.

Se utiliza la siguiente fórmula para estandarizar los valores y poder analizarlos.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

X es el valor que vamos a estandarizar

Se convierte la distribución real en una distribución normal estándar utilizando un valor llamado Z, o estadístico Z, que será la distancia entre un valor seleccionado, designado X, y la media μ, dividida por la desviación estándar σ.

Un valor Z mide la distancia entre un valor especificado de X y la media aritmética, en las unidades de la desviación estándar. Al determinar el valor Z utilizando la expresión anterior, es posible encontrar el área de probabilidad bajo cualquier curva normal haciendo referencia a la distribución normal estándar en las tablas correspondientes.

El área del recinto determinado por la función y el eje de abscisas es igual a la unidad (1). Al ser simétrica respecto al eje que pasa por $x = \mu$, deja un área igual a 0.5 a la izquierda y otra igual a 0.5 a la derecha. La probabilidad equivale al área encerrada bajo la curva.

Ejemplo

Suponga que las lecturas de termómetros se distribuyen normalmente, con una media de 0˚C y una desviación estándar de 1˚C. Se selecciona aleatoriamente un termómetro y se prueba. Calcule la probabilidad indicada, donde Z es la lectura en grados.

1) $P(Z < 1.96)$

2) $P(Z < 0.53)$

Para resolver el problema necesitamos utilizar la tabla para puntuaciones Z. No hay que estandarizar los valores porque la media es 0 y la desviación estándar es 1. Utilizaremos la tabla directamente.

P (Z < 1.64) se lee la probabilidad de que Z sea menor que 1.64, entonces buscamos 1.64.

Procedimiento:

En la columna de la izquierda (X) se busca 1.6, luego nos movemos a la derecha 5 lugares hasta llegar a la columna del 4 (observa la flecha roja).

P (Z < 1.96) = 0.9750 = 97.50%

P (Z < 0.53) = 0.7019 = 70.19%

La tabla solamente ofrece los valores por debajo de la curva, en el curso de Estadística de 12º grado podrás estudiar otros casos con la tabla de las puntuaciones Z.

Ver los ejemplos en la tabla a continuación

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Ejemplo

La media de los pesos de 500 estudiantes de un Instituto es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuál es la probabilidad de que haya estudiantes pesan menos de 76 kg.

Si observamos, la media no es 0 y la desviación estándar no es 1, por lo tanto, hay que estandarizar.

Usar la fórmula

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{76 - 70}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Lo que en realidad hicimos fue convertir el peso de 76 kg a 2, lo que se conoce como estandarizar. Este valor de 2 lo podemos localizar en la tabla.

P (Z < 2) = 0.5793 = 57.93%

Nota:

La tabla se compone de dos partes: la parte de los valores de Z positivos (como la que se muestra en este módulo), y la parte negativa. No hemos mostrado la parte negativa, pero el procedimiento es exactamente el mismo que cuando trabajamos los valores positivos. Esta parte, exhortamos que cada maestro la practique con sus alumnos, aunque se trabajará más profundo en el curso de Estadística.

Ejercicios de Práctica 7

A. Suponga que las lecturas de termómetros se distribuyen normalmente, con una media de 0˚C y una desviación estándar de 1˚C. Se selecciona aleatoriamente un termómetro y se prueba. Calcule la probabilidad indicada, donde Z es la lectura en grados.

1. $Z < 1.96$
2. $Z < 1.57$
3. $Z < 1.65$
4. $Z < 0.00$

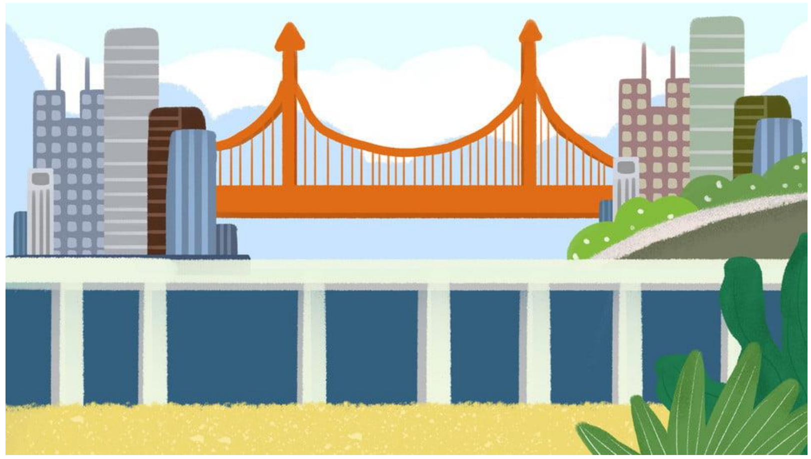
B. Se analizaron los resultados de la prueba para admisión universitaria (College Board) en Matemáticas y se determinó una media igual a 560 y una desviación estándar de 10. Si los estudiantes obtuvieron las siguientes puntuaciones, estandariza cada una de ellas (hallar Z).

1. Ileana – 570
2. Ángel – 555
3. Wanda – 560
4. Diego – 585
5. Carlos – 565

C. La media de las edades de 500 estudiantes de una escuela es 18 años y la desviación típica o estándar es 2 años. Suponiendo que las edades se distribuyen normalmente, hallar cuál es la probabilidad de que haya estudiantes con 15 años menos.

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

Unidad 2: Ecuaciones lineales de dos variables y Regresión lineal



La construcción de edificios y puentes requiere de una planificación y, ejecución cuidadosa y precisa. El trabajo de los ingenieros y arquitectos reúne estas características, debido a que deben garantizar la seguridad de los habitantes.

Las estructuras de las obras de ingeniería deben cumplir determinadas condiciones de equilibrio. Estas condiciones se satisfacen por medio de igualdades en las que interfieren el peso de los elementos de la estructura y las fuerzas que sostienen esos pesos. De no cumplirse estas condiciones, las estructuras no se sostendrían y se caerían.

Los ingenieros analizan situaciones de equilibrio haciendo uso de igualdades en las que intervienen variables. Estas igualdades se llaman ecuaciones.

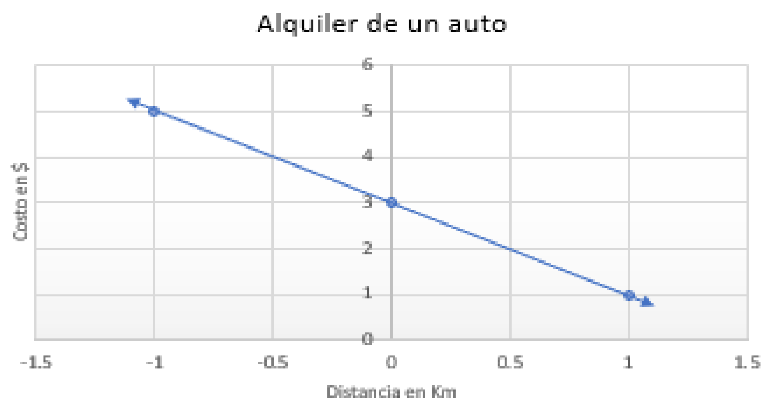
Lección 8: Ecuaciones lineales en dos variables

Una de las ecuaciones más utilizadas es la ecuación lineal en dos variables. Estas ecuaciones tienen una forma general: $Ax + By + C = 0,$ donde A, B y C son números reales, y x, y son las variables. Podemos dibujar la gráfica de una ecuación lineal en dos variables en el plano de coordenadas o plano cartesiano.

Ejemplo

Sara quiere alquilar un auto que le cuesta \$ 30.00 por día más \$ 0.25 por cada kilómetro recorrido. Observemos que el costo de un día dependerá de la distancia en kilómetros que recorra. Consideremos que la letra x representa la cantidad de kilómetros que recorra por día, y que la letra y representa el costo de alquiler diario. La siguiente tabla muestra la relación entre la distancia recorrida en kilómetros y los gastos incurridos por el alquiler del auto por día.

x (km)	y ($)
0	30
4	31
8	32
12	33
16	34
20	35



Al unir los puntos se obtiene una línea recta, en la que x representa la cantidad de kilómetros recorridos en un día, mientras que y representa el costo de alquiler de alquiler de ese día.

En este ejemplo solamente se obtuvo una porción de la recta porque el costo y la cantidad de kilómetros recorridos (distancia) no pueden ser negativos.

Gráfica de una ecuación lineal en dos variables

La gráfica de una ecuación lineal en dos variables es siempre una línea recta.

Ejemplo

Trazar la gráfica de $\boldsymbol{2x + y = 3}$

Primero hay que despejar para y: $y = -2x + 3$ Propiedad inverso aditivo

Construir la tabla de valores asignando valores a x, evaluarlos en la ecuación y obtener los valores de y. La x es la variable independiente, por eso se le asigna cualquier valor. Como la gráfica es una recta, con dos puntos es suficiente para construir la gráfica, pero es conveniente asignar valores negativos, el cero y valores positivos.

$y = -2x + 3$ $\quad$ $y = -2x + 3$ $\quad$ $y = -2x + 3$

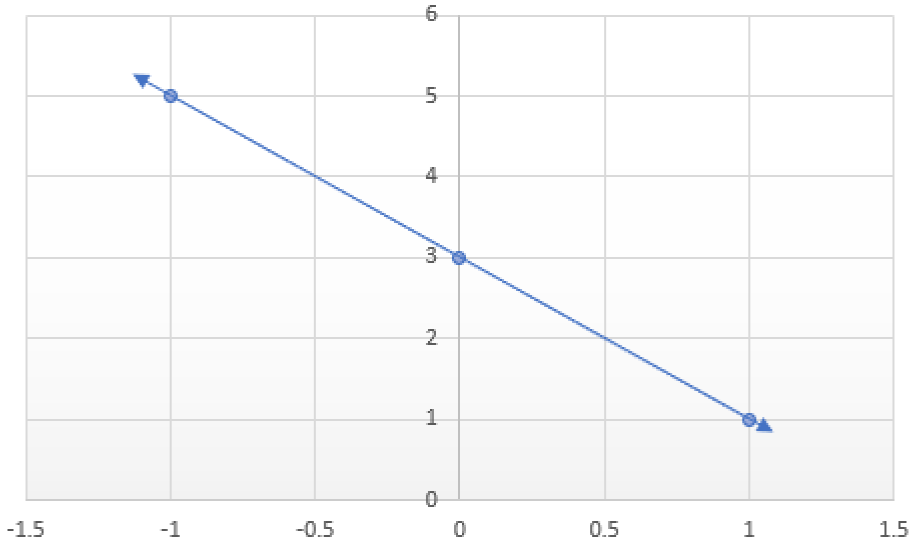
$\boldsymbol{y = -2(-1) + 3}$ $\quad$ $\boldsymbol{y = -2(0) + 3}$ $\quad$ $\boldsymbol{y = -2(1) + 3}$

$\boldsymbol{y = 2 + 3}$ $\quad$ $\boldsymbol{y = 0 + 3}$ $\quad$ $\boldsymbol{y = -2 + 3}$

$\boldsymbol{y = 5}$ $\quad$ $\boldsymbol{y = 3}$ $\quad$ $\boldsymbol{y = 1}$

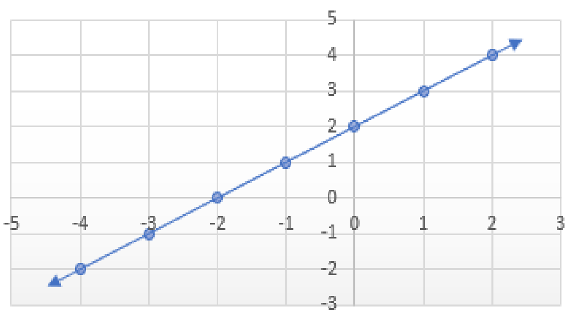
x	y
-1	**5**
0	**3**
1	**1**

La gráfica de la ecuación $y = -2x + 3$ es la siguiente:

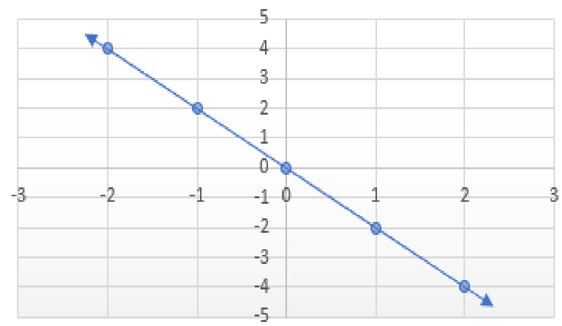


Las ecuaciones lineales en dos variables poseen algunas características:

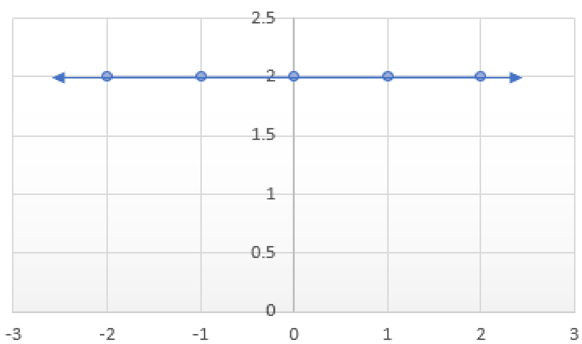
1. la gráfica es una línea recta.
2. tienen una inclinación que puede ser positiva, negativa, cero o indefinida.
3. algunas tienen intercepto en y, otras intercepto con el eje de x y otras con ambos ejes.



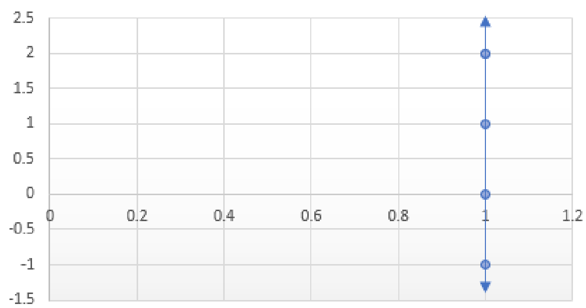
positiva



negativa



cero



indefinida

Pasos que deben seguirse en la resolución de ecuaciones

- ✓ Eliminar los denominadores de las fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación por el denominador común.
- ✓ Simplificar cada lado de la ecuación, usando la propiedad distributiva de ser necesario para eliminar paréntesis y sumar términos semejantes.
- ✓ Colocar en un lado de la ecuación los términos que tengan la variable $\boldsymbol{y}$ y en el otro lado los términos que tengan la variable x y los números sin variable.
- ✓ Utilizar la propiedad de multiplicación o división de igualdad para que la variable tenga coeficiente igual a uno.
- ✓ Construir una tabla de valores: asignar valores a x, evaluar y obtener los valores de $\boldsymbol{y}$.

Propiedades de las igualdades

Si a = b, entonces, $a + c = b + c$

Si a = b, entonces, a$a - c = b - c$

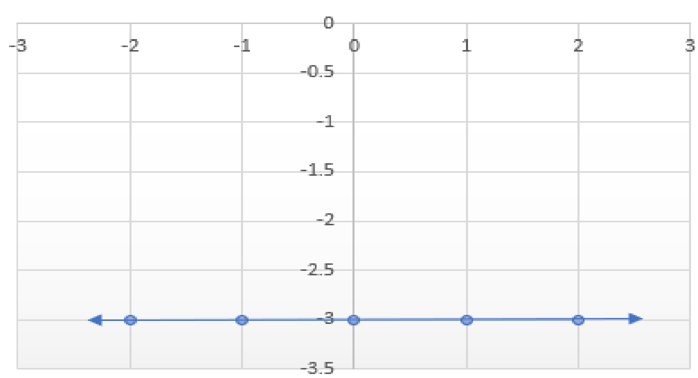
Si a = b, entonces, $a \cdot c = b \cdot c, c \neq 0$

Si a = b, entonces, $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}, c \neq 0.$

Ejemplos

1. Trazar la gráfica de la ecuación $y = -3$

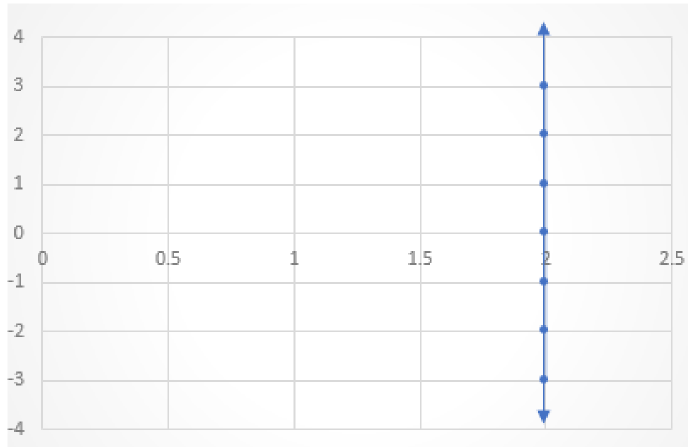
La solución de esta ecuación es el conjunto de todos los puntos del plano en los cuales el valor de $\boldsymbol{y}$ es -3 para todo valor de x. La gráfica es una recta horizontal que no interseca al eje de x, pero sí interseca al eje de y en el punto (0, -3).



2. Trazar la gráfica de la ecuación $x = 2$

Esta ecuación no tiene la variable y, la gráfica es una recta vertical que pasa por el punto (2,0). Para todo valor de y, la x es 2.

Esta ecuación no es una función porque x se repite.



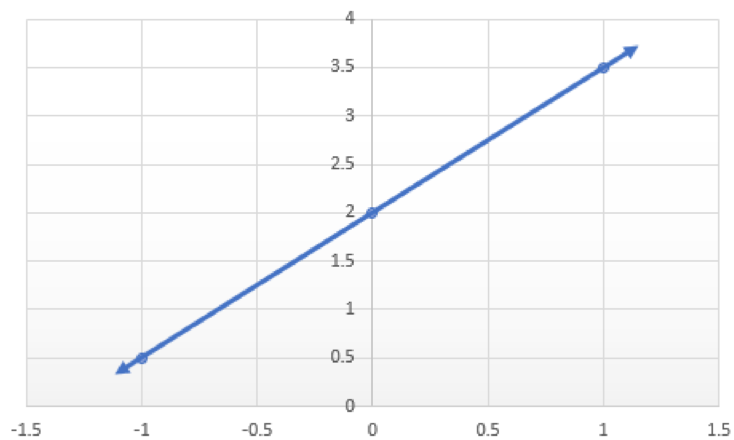
3. Trazar la gráfica de $-x + 2y = 4$

$$-x + 2y = 4$$

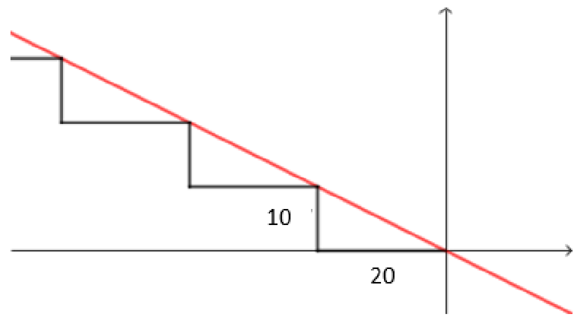
$$2y = x + 4$$

$$\frac{2}{2}y = \frac{x}{2} + \frac{4}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$



Lección 9: La pendiente de una recta



Consideremos una escalera con la siguiente descripción: el alto de cada escalón es la mitad de la base de cada uno. Ahora tomaremos un punto en el borde de cada escalón. Todos los puntos seleccionados están contenidos en una recta. Esto es así porque la inclinación es la misma a lo largo de toda la escalera. La inclinación de la recta está determinada por la **pendiente**.

La **pendiente** es la razón entre la elevación (el alto de cada escalón) y el recorrido (el ancho de cada escalón). La pendiente la denotamos con la letra m.

$$m = \frac{elevación}{recorrido}$$

Una razón es una división. La podemos representar como una fracción, $\frac{a}{b}$.

La pendiente de una recta que contiene los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$, se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Δ este símbolo se lee “delta” y significa cambio

La pendiente es la razón de cambio entre la elevación y el recorrido.

La fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se utiliza para determinar la pendiente de la recta cuando conocemos por lo menos, dos puntos de la recta.

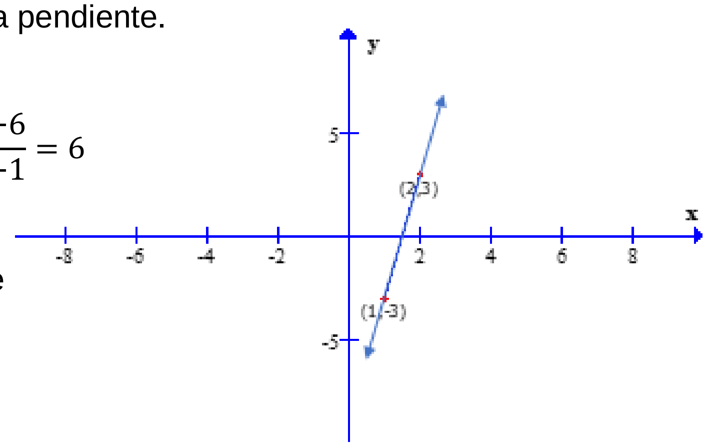
Ejemplos

Encontrar la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes puntos

1. $(2,3)\ y\ (1,-3)$

Debemos identificar cuál punto será (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Usaremos el punto $(2,3)$ como (x_1, y_1) y $(1,-3)$ como (x_2, y_2). Pero podemos intercambiarlos y no se altera la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-3}{1-2} = \frac{-3+-3}{1+\ -2} = \frac{-6}{-1} = 6$$

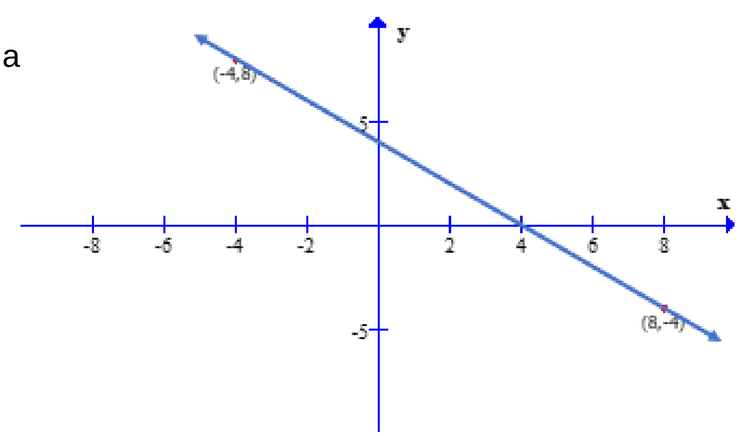


La pendiente es positiva, la recta sube de Izquierda a derecha.

2. $(-4,8)\ y\ (8,-4)$

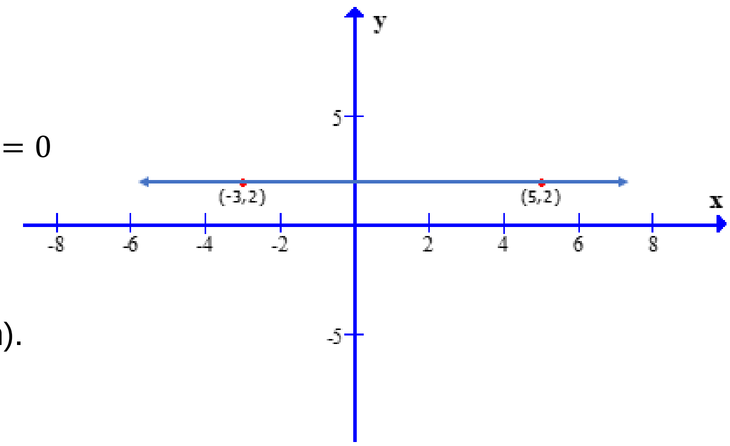
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-8)}{8-(-4)} = \frac{-4+-8}{8+4} = \frac{-12}{12} = \ -1$$

La pendiente es negativa, la recta baja de izquierda a derecha.



3. $(-3{,}2)\ y\ (5{,}2)$

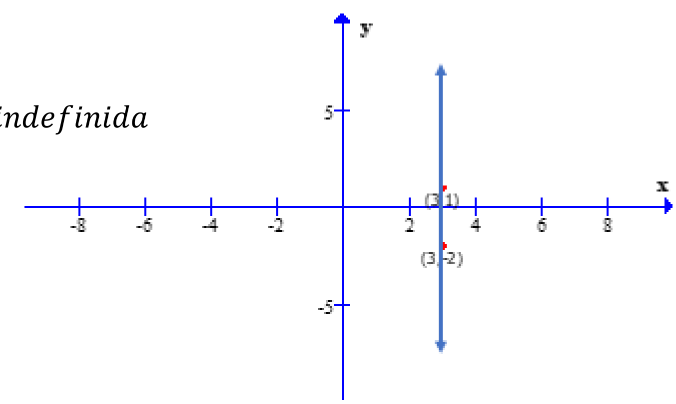
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{5-(-3)} = \frac{0}{5+3} = \frac{0}{8} = 0$$



La pendiente es cero, por lo que
la recta es horizontal (no hay inclinación).

4. $(3{,}1)\ y\ (3,-2)$

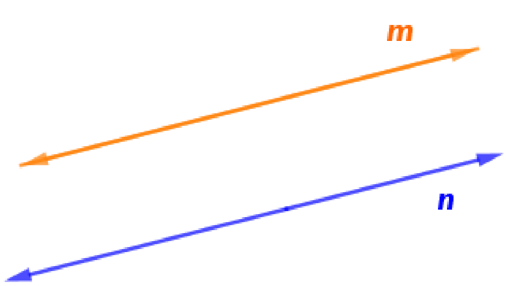
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-1}{3-3} = \frac{-2+-1}{0} = \frac{-3}{0} = indefinida$$



La pendiente es indefinida, por lo que la
recta es vertical.

La pendiente de rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas son paralelas si están en el mismo plano y no se intersecan (no se cruzan).
Las rectas paralelas **tienen la misma pendiente**.



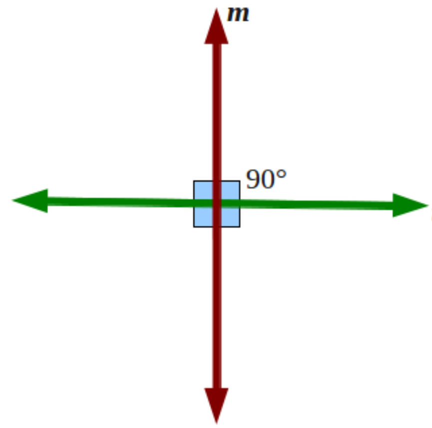
Dos rectas en un plano son paralelas si tienen:

- ❖ la misma pendiente
- ❖ distintas intersecciones en y
- ❖

m y n son rectas paralelas, m || n

|| significa paralelo

Las rectas perpendiculares son aquellas que están en el mismo plano y su intersección forma un ángulo de 90º (ángulo recto). Por ejemplo, una recta horizontal y una recta vertical son perpendiculares, pero no las únicas.



Las rectas m y t son perpendiculares, m ⊥ t.

⊥ se lee "perpendicular a "

En dos rectas perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco opuesto de la otra. Al multiplicar las pendientes de las dos rectas perpendiculares el producto es -1.

$$m \cdot t = -1$$

Ejemplos

1. Determina la pendiente de la recta que es paralela a la recta que pasa por (2,3) y (-1, 5).

   Paso 1: Calcular la pendiente con $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-3}{-1-2} = \frac{2}{-1+-2} = -\frac{2}{3}$

   Paso 2: Buscar la pendiente de la recta paralela (usar la definición)

   La pendiente de la recta paralela a la recta que pasa por (2,3) y (-1, 5) es $-\frac{2}{3}$ porque son iguales.

2. Determina la pendiente de la recta que es perpendicular a la recta que pasa por (2, 3) y (1, 5).

   Paso 1: Buscar la pendiente de la recta que pasa por (2,3) y (1, 5)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{1-2} = \frac{2}{1+-2} = -\frac{2}{1} = -2$$

   Paso 2: Buscar la pendiente de la recta perpendicular a la recta que pasa por (2, 3) y (1, 5). La pendiente de la recta perpendicular es $\frac{1}{2}$.

Ejercicios de Práctica 8

A. Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

1. (3, -4) y (4, -3)

2. (3, 0) y (14, 0)

3. (5, 5) y (-5, -5)

4. (1, 4) y (1, 10)

5. (9, 6) y (7, 6)

B. Determina la pendiente de:

1. La recta que es paralela a la recta que pasa por (6, 2) y (3, 4).

2. La recta que es perpendicular a la recta que pasa por (-4, 5) y (3, -8)

C. Determina el valor de y si la recta pasa por los puntos (3, y) y (6, 8), y tiene pendiente igual a 2.

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

Lección 10: Ecuaciones de la recta

Aprendimos acerca de la pendiente de la recta y su definición algebraica. Ahora, la definición. Nos servirá para obtener una ecuación que represente algebraicamente en el conjunto de puntos (x, y), que estén en la línea.

Sea (x, y) cualquier punto de la línea, entonces la pendiente de la recta que contiene a $(\boldsymbol{x}, y)$ y $(\boldsymbol{x}_1, y_1)$, si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_1$, es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por $(x_2 - x_1)$ para eliminar el denominador obtenemos la siguiente ecuación: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Esta ecuación se conoce como la ecuación punto – pendiente, y se utiliza para determinar la ecuación de la recta cuando conocemos al menos un punto (x_1, y_1) y la pendiente.

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (1.2) y tiene una pendiente de 4.

Es conveniente escribir los datos del problema.

Datos

Punto dado (1, 2), esto es (x_1, y_1)

La pendiente es 4, o sea, m = 4.

Luego de analizar los datos, observamos que todo lo que necesitamos para la ecuación ya lo tenemos,

$y - y_1 = m(x - x_1)$, entonces sustituimos:

$y - 2 = 4(x - 1)$ sustituir los datos

$y - 2 = 4x - 4$ propiedad distributiva

$y = 4x - 4 + 2$ propiedad aditiva de la igualdad

$y = 4x - 2$ Esta es la ecuación de la recta

La $\boldsymbol{x}$ y la y no se sustituyen en este caso, son las variables de la ecuación.

Al obtener la ecuación de la recta quedó una ecuación de la forma: $y = mx + b$. Esta ecuación se conoce como ecuación pendiente – intercepto en y.

Si conocemos la pendiente y el intercepto en y, entonces basta con sustituir estos valores en la ecuación $y = mx + b$, solamente sustituimos la pendiente y el intercepto para tener la ecuación de la recta.

Ejemplos

1. Determinar la ecuación de la recta que tiene una pendiente igual a 5 y un intercepto en y igual a 2.

$$y = mx + b$$

$$y = 5x + 2$$

2. Determinar la ecuación de la recta que tiene una pendiente igual a -7 y un intercepto en y igual a -9.

$$y = mx + b$$

$$y = -7x + -9$$

$$y = -7x - 9$$

3. Determinar la ecuación de la recta con pendiente igual a 8 y un intercepto en y igual a -1.

$$y = mx + b$$

$$y = 8x + -1$$

$$y = 8x - 1$$

Ejercicios de Práctica 9

A. Determina la pendiente de la recta, el intercepto en y, la ecuación de la recta y dibujar la gráfica.

1. Pasa por el punto (2, -3) y tiene una pendiente igual a -2.

De acuerdo con estos datos la ecuación a utilizarse es de la forma: $y - y_1 = m(x - x_1)$,

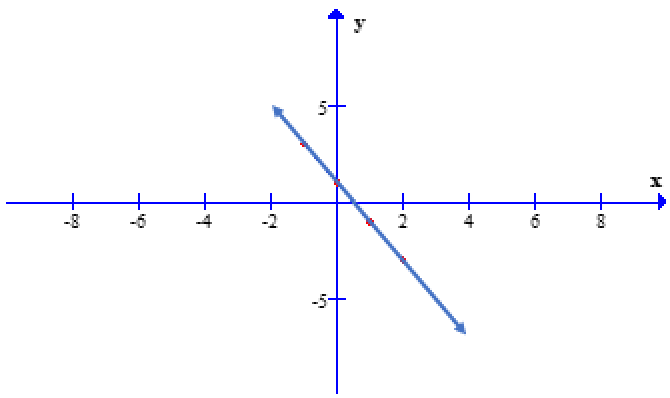
x	y
-1	3
0	1
1	-1
2	-3

$$y - (-3) = -2(x - 2)$$
$$y + 3 = -2x + 4$$
$$y = -2x + 4 - 3$$
$$y = -2x + 1$$

Datos

Punto (-2, -3), o sea, (x_1, y_1)

m = -2



2. Pasa por el punto (4,6) y tiene una pendiente igual a 2.

3. Determina la pendiente y el intercepto en y de cada ecuación.
   a. $y = 5x + 8$
   b. $y = -2x + 7$
   c. $2y = 8x - 10$
   d. $8x + 3y = -10$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

Ejemplo adicional

Determina la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones:

Pasa por los puntos (1, 6) y (4, 12).

Solución:

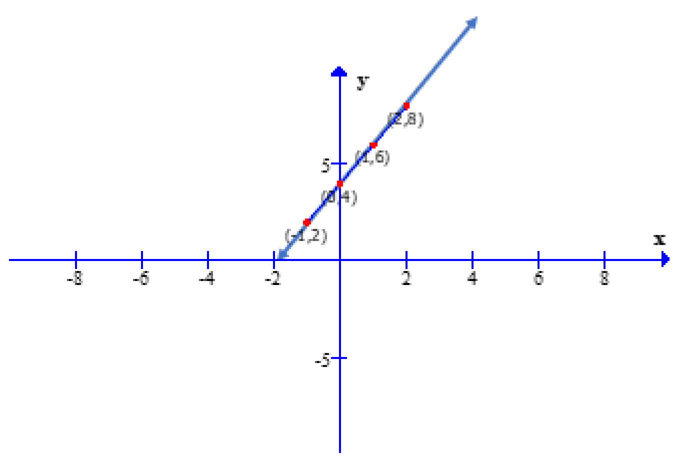
Para determinar la ecuación nos fijamos que solamente tenemos dos puntos, (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Por lo tanto, necesitamos primero encontrar la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 6}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

Ahora, como tenemos dos puntos y la pendiente, podemos encontrar la ecuación de la recta. Vamos a utilizar: $y - y_1 = m(x - x_1)$ y seleccionamos uno de los puntos (cualquiera de ellos para (x_1, y_1). Escojamos el punto $(1, 6)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$
$$y - 6 = 2(x - 1)$$
$$y - 6 = 2x - 2$$
$$y = 2x - 2 + 6$$
$$y = 2x + 4$$

x	y
-1	2
0	4
1	6
2	8



RESUMEN		
Formas de ecuaciones lineales	**Ecuación para la recta**	**Condiciones**
Estándar	$ax + by = c$	a y b no pueden ser cero
Pendiente - intercepto	$y = mx + b$	La recta interseca al eje de y en b con pendiente m
Punto - pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$	La recta pasa por el punto (x_1, y_1), con pendiente m
Horizontal	$y = c \quad c - constante$	La pendiente es cero; paralela el eje de x (eje horizontal)
Vertical	$x = c \quad c - constante$	La pendiente es indefinida; paralela al eje de y (eje vertical)

Prueba 4: La pendiente y ecuación de la recta **Valor total: 50 puntos**

A. Identifica, en cada una de las siguientes ecuaciones, la pendiente y el intercepto en y. 10 pts.

Ecuación	m	b
$x - y = 15$		
$y = -10$		
$2x + y = 7$		
$4 + 5x = \frac{1}{3}y$		
$x = 4$		

B. Escribe la ecuación de la recta que satisfaga las siguientes condiciones: 15 pts.

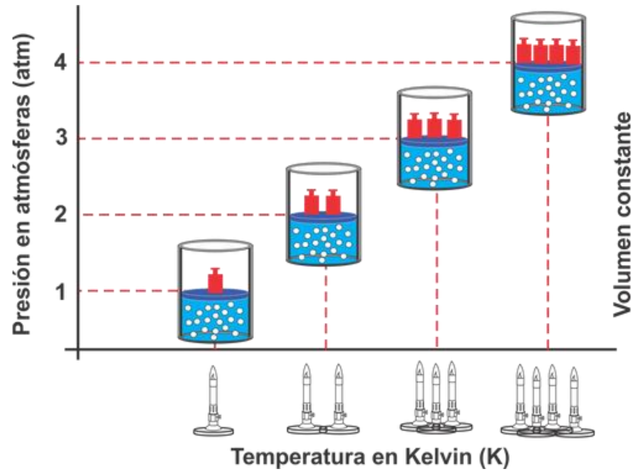
1. Pasa por $(-2, 4)$ y $(-6, 8)$
2. Pasa por $(3, 0)$ y la pendiente es cero.
3. Pasa por $(2, -1)$ y no está definida
4. Pasa por $(-1, -1)$ y es paralela al eje de x
5. Pasa por $(-2, -3)$ y es perpendicular a la ecuación $9x - 3y = 15$

C. Dibuja la gráfica de las siguientes ecuaciones: 20 pts.

1. $y = 4x - 2$
2. $-2y = 16x + 20$
3. $y = 5$
4. $x = 1$

D. Determina el valor de y si la recta pasa por los puntos (4, y) y (5, -2), y tiene pendiente igual a 3. 5 pts.

Lección 11: Modelos de variación



Los científicos, en muchas ocasiones, hablan de modelos matemáticos que describen situaciones o fenómenos de la vida real. Estos modelos, usualmente, se refieren a ecuaciones que describen la relación entre dos variables, las cuales representan cantidades. Por ejemplo, el modelo podría describir cómo la población de especies de animales varía con el tiempo o cómo varía la presión de un gas a medida que cambia la temperatura. De igual manera, médicos y antropólogos pueden estimar la estatura de una persona midiendo la longitud del fémur. Esto es así, porque existe una relación entre estatura y longitud del fémur. Por otro lado, las escalas Celsius y Fahrenheit se utilizan diariamente para medir temperaturas, ambas temperaturas se relacionan por medio de equivalencias. Estos modelos responden a lo que se conoce como modelos de variación y estudiaremos dos de ellos: **variación directa** y **variación inversa**.

Variación directa

En Geometría se nos enseña a buscar el perímetro de varias figuras. El perímetro de un cuadrado es un múltiplo constante (a) de la longitud del lado (x), $P = 4x$. Esto es un ejemplo de variación directa.

Dos variables x y y varían directamente si $y = ax$ para una constante a que no sea 0, $a \neq 0$.

Definición de variación directa
Si las cantidades x y y están relacionadas por la ecuación $y = ax$ Para alguna constante $a \neq 0$, decimos que y varía directamente con x, o y es directamente proporcional a x. La constante a se llama constante de variación o constante de proporcionalidad.

La gráfica de una ecuación de la forma $y = mx + b$ es una recta con pendiente m e intercepto en y igual a b. Por lo tanto, la gráfica de una ecuación $y = ax$ tiene una pendiente a y un intercepto en y igual a 0.

Ejemplos

1. Un kilogramo de café cuesta $28.00, el número de kilogramos comprados y el costo de la compra son las cantidades directamente proporcionales.
   Veamos la tabla.

Kilogramos de café	1	2	5	12
Costo en $	28	56	140	336

En este ejemplo, los kilos y el costo son variables y el precio del kg de café es constante.

En la tabla se observa con claridad que, a medida que se compran más kilos hay un aumento en el costo; y a medida que se compran menos kilos, hay una disminución en el costo; por esto se dice que los kilogramos y el costo son cantidades directamente proporcionales. Si divides costo entre kilogramos el cociente siempre es igual a 28.

El costo es la **variable dependiente** y los kilogramos la **variable independiente.**

Observemos

$y = ax$ ecuación de variación directa

al dividir ambos lados de la ecuación entre x, obtenemos

$\frac{y}{x} = a,$ de esta manera se puede obtener la constante de variación o constante de proporcionalidad.

$$\frac{y}{x} = a \quad \text{es lo mismo que } a = \frac{y}{x}$$

$$a = \frac{y}{x}$$

$$a = 28 \div 1 = 28$$

$$a = 56 \div 2 = 28$$

$$a = 140 \div 5 = 28$$

$$a = 336 \div 12 = 28$$

La constante de variación es 28

Un grupo de pares ordenados (x, y) muestra variación directa si las razones $\frac{y}{x}$, son constantes.

2. Determinar si x y y muestran una variación directa. Si es así, determinar la constante de variación.

a. $6x = y$ b. $xy = -0.25$ c. $y + x = 10$ d. $2y = 8x$

Solución

$6x = y$	$xy = -0.25$	$y + x = 10$	$2y = 8x$
$y = 6x$ Está escrita de la forma $y = ax$, por la tanto **es variación directa.**	$y = \frac{-0.25}{x}$ No está escrita de la forma $y = ax$, por lo tanto, **no es variación directa**	$y = -x + 10$ No está escrita de la forma $y = ax$, por lo tanto, **no es variación directa**	$y = \frac{8}{2}x$ $y = 4x$ Está escrita de la forma $y = ax$, por la tanto **es variación directa.**
$a = \frac{y}{x}$ $6 = \frac{y}{x}$ La constante de variación es 6	No tiene constante de variación directa	No tiene constante de variación directa	$a = \frac{y}{x}$ $4 = \frac{y}{x}$ La constante de variación es 4

Variación inversa

Otro modelo matemático de frecuentemente se utiliza en es el de variación inversa. Este módulo es muy útil para entender fenómenos en la ciencia. En este modelo la ecuación es $y = \frac{a}{x}$, donde a es constante.

Definición de variación inversa
Si las cantidades x y y están relacionadas por la ecuación $$y = \frac{a}{x}$$ Para alguna constante $a \neq 0$, decimos que y varía inversamente con x o y es inversamente proporcional a x. La constante a se llama constante de variación o constante de proporcionalidad.

Observemos el siguiente ejemplo.

El tiempo t (en horas) que un grupo de voluntarios demora en construir un parque infantil es inversamente proporcional al número n de voluntarios. Un grupo de 10 voluntarios tarda 8 horas para construir el parque infantil.

1. Hacer una tabla que muestre el tiempo que tarda construir el parque infantil si el número de voluntarios fuese 15, 20, 25 y 30 personas.
2. ¿Qué sucede con el tiempo que tarda construir el parque infantil a mediada que el número de voluntarios aumenta?

Para contestar este problema primero hay que seguir los siguientes pasos:

- ✓ Comprender el problema: En este caso se nos presenta una descripción de dos cantidades que son inversamente proporcionales (variación inversa) y un par de valores de datos. Nos piden que creemos una tabla que presente datos adicionales.
- ✓ Hacer un plan: Usemos el tempo que tardan 10 voluntarios en construir el parque infantil para hallar la constante de variación. Luego, escribir una ecuación de variación inversa y sustituir con los diferentes números de voluntarios para hallar los tiempos correspondientes.
- ✓ Resolver el problema y contestar la pregunta.

Solución

t = tiempo n = número de voluntarios a = constante de variación

En ejemplo el modelo que se propone es uno de variación inversa, por lo tanto,

$t = \frac{a}{n}$ la t representa el tiempo y este depende de la cantidad de voluntarios, por eso ocupa el lugar de la y en la ecuación. La y es la variable dependiente. En el caso de la n (cantidad de voluntarios) ese valor lo podemos controlar, por lo tanto, es la variable independiente y ocupa el lugar de la x.

Sustituimos los valores:

$$t = \frac{a}{n}$$

$$8 = \frac{a}{10}$$

$$8(10) = a$$

$$80 = a$$

La constante de variación es 80, por lo tanto, la ecuación de variación inversa es $t = \frac{80}{n}$

Conociendo la ecuación de la variación inversa podemos construir la tabla.

n	15	20	25	30
t	5 hrs 20 min	4 hrs	3 hrs 12 min	2 hrs 40 min

$$t = \frac{80}{n} = \frac{80}{15} = 5\frac{5}{15} = 5\frac{1}{3} = 5\ horas\ y\ 20\ minutos$$

un tercio de hora es una tercera parte de 60, por lo tanto, divides 60 entre 3 y es 20

$$t = \frac{80}{n} = \frac{80}{20} = 4\ horas$$

un quinto de hora es una quinta parte de 60, por lo tanto, divides 60 entre 5 y es 12

$$t = \frac{80}{n} = \frac{80}{25} = 3\frac{5}{25} = 3\frac{1}{5} = 3\ horas\ y\ 12\ minutos$$

$$t = \frac{80}{n} = \frac{80}{30} = 2\frac{20}{30} = 2\frac{2}{3} = 2\ horas\ y\ 40\ minutos$$

dos tercios de hora significa dos terceras partes de 60, por lo tanto, es 40 minutos

Ejemplos

Indica si x y y muestran variación directa, indirecta o ninguna de las dos.

1.

x	1	2	3	4
y	60	30	20	15

Variación directa: los valores deben cumplir con lo siguiente $y = ax$

Variación inversa: los valores deben cumplir con lo siguiente $y = \frac{a}{x}$

$y = ax$	$y = ax$	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{a}{x}$
$60 = a(1)$	$30 = a(2)$	$60 = \frac{a}{1}$	$30 = \frac{a}{2}$	$20 = \frac{a}{3}$	$15 = \frac{a}{4}$
$60 = a$	$30 = 2a$	$60(1) = a$	$30(2) = a$	$20(3) = a$	$15(4) = a$
	$\frac{30}{2} = a$	$60 = a$	$60 = a$	$60 = a$	$60 = a$
	$15 = a$				

La constante de variación no es la misma, por lo que no es variación directa.

La constante de variación es la misma, esto significa que los valores muestran una variación inversa.

Si x y y son directamente proporcionales, entonces el cociente $\frac{y}{x}$ es constante.

Este cociente es la constante de variación.

Si x y y son inversamente proporcionales, entonces el producto xy es constante.

Este producto equivale a la constante de variación.

Las variables x y y son inversamente proporcionales. Usa los valores dados para escribir una ecuación que relaciones x y y. Luego encuentra $x = 2$.

1. $x = 5,\ \ y = -4$

Si las variables son inversamente proporcionales, entonces $y = \frac{a}{x}$.

Buscar primero la constante de variación: $y = \frac{a}{x}$

$$-4 = \frac{a}{5}$$

$$-4(5) = a$$

$$-20 = a$$

La ecuación es: $y = \frac{-20}{x}$

Encontrar el valor cuando $x = 2$ $\quad y = \frac{-20}{x}$

$y = \frac{-20}{2} = -10$ Cuando $x = 2, y = -10$.

2. $x = -12,\ \ y = -\frac{1}{6}$

Si las variables son inversamente proporcionales, entonces $y = \frac{a}{x}$.

Buscar primero la constante de variación: $y = \frac{a}{x}$

$$-\frac{1}{6} = \frac{a}{-12}$$

$-12\left(-\frac{1}{6}\right) = a$ multiplicar ambos lados por -12

$$\frac{12}{6} = a$$

$2 = a$ constante de variación

La ecuación es: $y = \frac{2}{x}$

Encontrar el valor cuando $x = 2$ $\quad y = \frac{2}{x}$

$$y = \frac{2}{2}$$

$y = 1$ Cuando $x = 2,\ \ y = 1$.

Ejercicios de Práctica 10

A. Indica si x y y muestran variación directa, indirecta o ninguna de las dos.

1. $y = \frac{2}{x}$

3. $xy = 12$

5.

x	-4	-3	-2	-1
y	20	15	10	5

2. $\frac{y}{x} = 8$

4. $y = x + 4$

A. Las variables x y y son inversamente proporcionales. Usa los valores dados para escribir una ecuación que relaciones x y y. Luego encuentra $x = 3$.

1. $x = -3,\ y = 8$

2. $x = 1,\ y = 9$

3. $x = -4,\ y = -\frac{5}{4}$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

Asignación para entregar **Total 40 puntos**

A. Indica si x y y muestran variación directa, variación inversa o ninguna de las dos. 25 pts.

1.

x	4	6	8	12
y	21	14	10.25	7

2.

x	12	18	23	29
y	132	198	253	319

3. $x + y = 6$

4. $xy = 12$

5. $\frac{x}{y} = 5$

B. Las variables x y y son inversamente proporcionales. Usa los valores dados para escribir una ecuación que relaciones x y y. Luego encuentra $x = 4$. 15 pts.

1. $x = 3\,, y = 2$

2. $x = -6,\ y = 8$

3. $x = 2,\ y = -\frac{1}{2}$

Lección: 12 Diagrama de dispersión

¿Qué es un diagrama de dispersión?

Antes de responder este interrogante, es necesario dar respuesta a qué es dispersión.

Dispersión se define como el grado de distanciamiento de un conjunto de valores respecto a su valor medio.

A partir de esta definición, se derivan las medidas de dispersión, tales como: rango, varianza, desviación estándar, covarianza, coeficiente de correlación, etc.

Ahora bien, el diagrama de dispersión, también conocido como **gráfico de dispersión** o **gráfico de correlación** consiste en la representación gráfica de dos variables para un conjunto de datos. En otras palabras, analizamos la relación entre dos variables, conociendo qué tanto se afectan entre sí o qué tan independientes son una de la otra.

En este sentido, ambas variables se representan como un punto en el plano cartesiano y de acuerdo con la relación que exista entre ellas, definimos su tipo de correlación.

Con base en el comportamiento que toman las variables de estudio, podemos encontrar 3 tipos de correlación: positiva, negativa y nula.

Correlación positiva

Se presenta cuando una variable aumenta o disminuye y la otra también, respectivamente. Hay una relación proporcional. Por ejemplo, para un vendedor de carros, si él vende más carros (variable 1), va a ganar más dinero (variable 2).

Correlación negativa

Se presenta cuando una variable se comporta de forma contraria o a la otra, es decir que, si una variable aumenta, la otra disminuye. Hay una relación inversa proporcional. Por ejemplo, para la construcción de un edificio, entre más trabajadores estén construyendo un edificio (variable 1), menos tiempo se necesitará para tenerlo listo (variable 2).

Correlación nula

Si no encuentras un comportamiento entre las variables, existe una correlación nula.

El diagrama de dispersión se utiliza para examinar las posibles relaciones entre dos variables numéricas.

Una variable se coloca en el eje horizontal xy la otra en el eje vertical y.

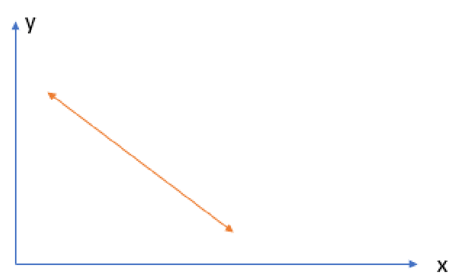
Ejemplos:

1. Un analista de mercado podría estudiar la efectividad de la publicidad si compara los volúmenes de ventas semanales y el gasto publicitario semanal.
2. Un director de recursos humanos interesado en la estructura del salario de una empresa podría comparar los años de experiencia de los empleados y su salario actual.
3. Un maestro puede comparar la relación que existe entre las puntuaciones obtenidas por un alumno en la clase de física y matemática.
4. Un nutricionista puede comparar la relación existente entre la cantidad de grasa de los alimentos y las calorías.

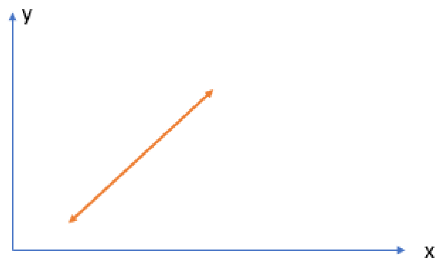
¿Cómo determinar que dos variables se relacionan y cómo es la relación?

- Dibujar el eje de x y el eje de y en un plano rectangular (sólo usar las partes positivas).
- Trazar los puntos representados por los pares ordenados (x, y).
- Trazar una recta que pase por la mayoría de los puntos (si aplica)

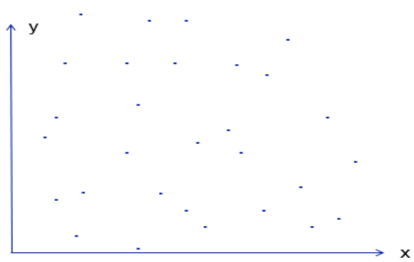
  Si la recta baja significa que mientras la variable x aumenta la variable y disminuye.



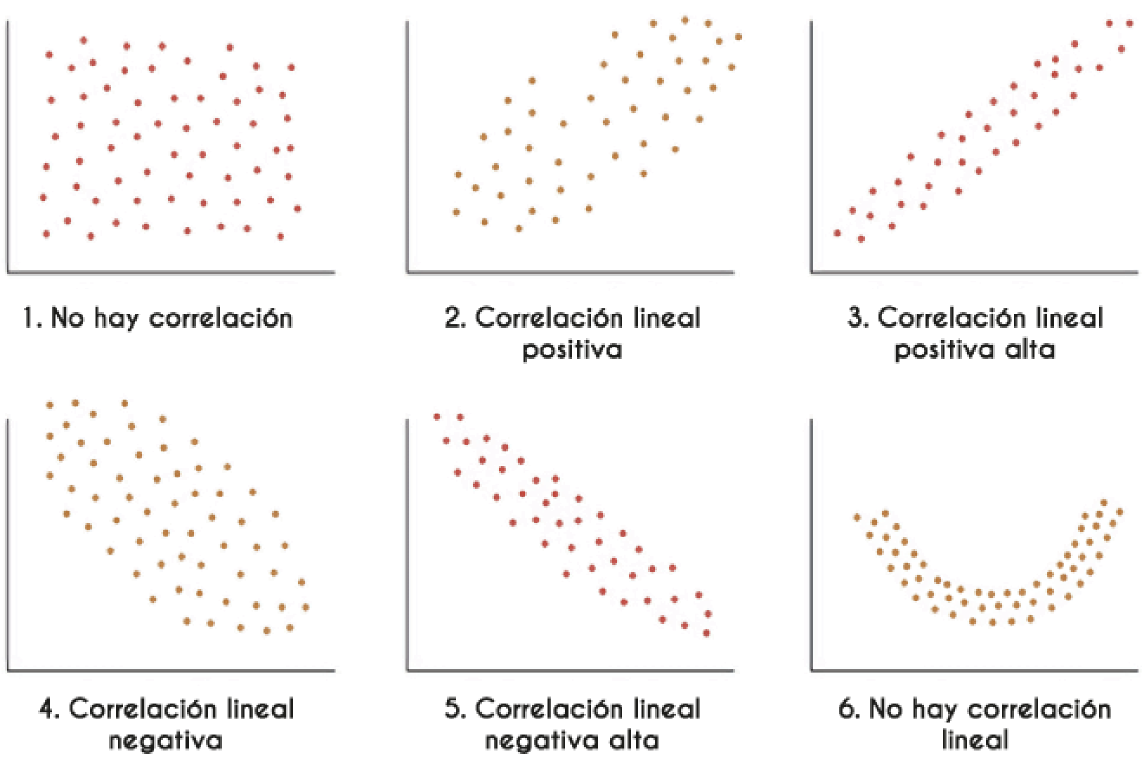
Si la variable x aumenta la variable y también aumenta.



En este Diagrama de Dispersión no hay relación aparente entre las variables



Ejemplos de correlaciones entre dos variables



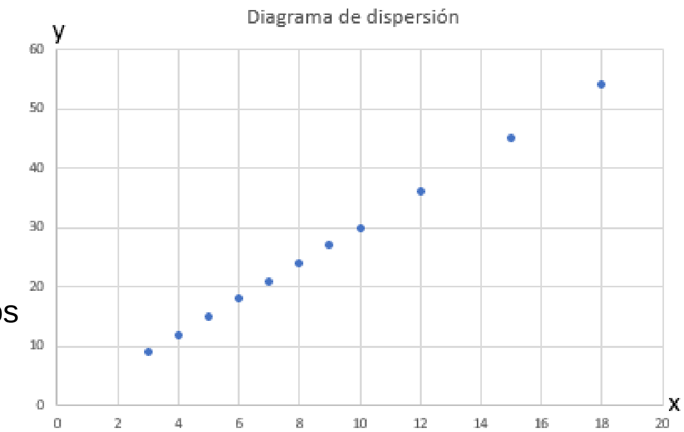
1. No hay correlación
2. Correlación lineal positiva
3. Correlación lineal positiva alta
4. Correlación lineal negativa
5. Correlación lineal negativa alta
6. No hay correlación lineal

Ejemplo

El siguiente es un conjunto de datos tomados de una muestra de $n = 11$ artículos.

x	7	5	8	3	6	10	12	4	9	15	18
y	21	15	24	9	18	30	36	12	27	45	54

a. Tracemos un diagrama de dispersión
b. ¿Existe una relación entre x y y?



Parece que existe una relación positiva muy a alta entre ambas variables. Si trazamos una línea por los puntos podríamos dibujar una recta casi perfecta.

Los datos en un diagrama de dispersión no siempre muestran una relación lineal exacta. Cuando los datos en un diagrama de dispersión muestran aproximadamente una relación lineal, podemos representar los datos con una **línea de ajuste**.

¿Cómo encontrar la línea de ajuste?

Paso 1: Crear un diagrama de dispersión de los datos.

Paso 2: Dibujar una línea que parece seguir de más cerca la tendencia dada por los puntos de datos. Debería haber tantos puntos por encima de la línea como por debajo de ella.

Paso 3: Elegir dos puntos de la línea y calcular las coordenadas de cada punto. Estos puntos no tienen que ser puntos de datos originales.

Paso 4: Escribir una ecuación de la línea que pasa a través de los puntos del paso 3. Esta ecuación es una representación de los datos.

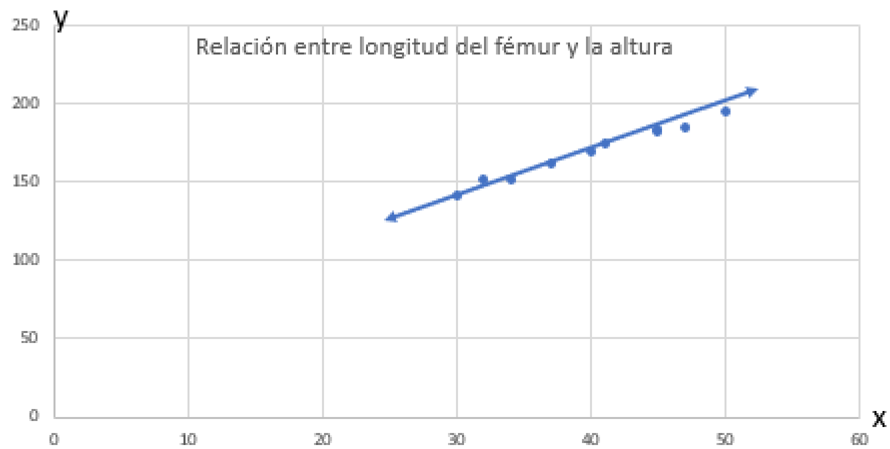
https://www.youtube.com/watch?v=bd3e5FtBQYY

Ejemplo

La tabla muestra las longitudes (en centímetros) y altura (en centímetros) del fémur de varias personas.

¿Los datos muestran una relación lineal? Si es así, vamos a escribir una ecuación de la línea de ajuste y la usaremos para calcular la altura de una persona cuyo fémur tiene 35 centímetros de largo.

Longitud del fémur (x)	Altura (y)
40	170
45	183
32	151
50	195
37	162
41	174
30	141
34	151
47	185
45	182



Dos puntos: $(30, 141)$ y $(42, 177)$

Escribir la ecuación de la recta. Para esto, hay que buscar la pendiente y sustituir uno de los puntos en $y - y_1 = m(x - x_1)$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{177 - 141}{42 - 30}$

$m = \frac{36}{12}$

$m = 3$

$y - y_1 = m(x - x_1)$. se utilizó (30,141)

$y - 141 = 3(x - 30)$

$y - 141 = 3x - 90$

$y = 3x - 90 + 141$

$y = 3x + 51$

Lección 13: Línea de mejor ajuste

La línea de mejor ajuste es la línea que pertenece, tan cerca como sea posible, a todos los puntos de datos. Muchas herramientas tecnológicas tienen una función de regresión lineal que se puede usar para encontrar la línea de mejor ajuste.

Para saber si una línea es de mejor ajuste, o sea, cuán bien se ajusta una línea a un conjunto de datos (x, y), se utiliza el coeficiente de correlación. El coeficiente de correlación por r, es un número de -1 a 1 que mide cuán bien se ajusta una línea a un conjunto de datos (x, y), además mide la fuerza de relación entre las variables. Cuando r esta cerca de 1 los puntos están cerca de una línea cono pendiente positiva, pero cuando r se acerca a -1 los puntos están cerca de una línea con pendiente negativa.

Calcular y determinar la ecuación de la línea de mejor ajuste o línea de regresión es una tarea que conlleva un poco de tiempo. Además, es importante conocer lo que significan los símbolos y expresiones matemáticas para comprender las fórmulas a utilizarse. Pero, no podemos olvidar, que esa línea de regresión es una recta, por lo tanto, tendrá una pendiente y un intercepto en y, y podrá escribirse de la forma

$y = mx + b$.

Para determinar la línea de mejor ajuste o línea de regresión necesitamos lo siguiente:

- la pendiente
- el intercepto e y

Si conocemos estos valores los podemos sustituir en la ecuación $y = mx + b$ y tendremos la ecuación de la línea de mejor ajuste.

Para obtener la pendiente debemos usar la siguiente fórmula:

$$m = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

Para obtener el intercepto en y usaremos:

$$b = \bar{y} - m\bar{x}$$

Ahora veremos lo que significa cada símbolo o expresión matemática.

n cantidad total de datos (pares ordenados)

$\sum$ se lee "sumatoria", representa que se realizará una suma

xy significa el producto de x por y (multiplicamos)

$\sum xy$ se multiplica cada valor de x por cada valor de y, luego se suman los productos

$\sum x$ se suman todos los valores de x

$\sum y$ se suman todos los valores de y

$(\sum x)(\sum y)$ significa vamos a multiplicar la suma de todos los valores de x por la suma de todos los valores de y

$\sum x^2$ significa elevar a la segunda potencia (al cuadrado) cada valor de x y luego sumar todos esos cuadrados

$(\sum x)^2$ significa sumar todos los valores de x, luego elevar al cuadrado esa suma.

$\bar{x}$ significa media o media aritmética de x, es el promedio de los valores de x. Se obtiene sumando todos los valores de x y dividiendo esa suma entre la cantidad total de datos (n).

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

Entonces, conociendo los símbolos, expresiones y su significado podemos buscar la línea de mejor ajuste o línea de regresión. Aunque parezca complicado no lo es, lo primero que debemos hacer es buscar todas las partes que componen cada una de las fórmulas para la pendiente y el intercepto en y.

Veamos un ejemplo

Calcular la ecuación de regresión lineal de los siguientes datos:

x	3	1	3	5
y	5	8	6	4

Busquemos la pendiente con

$$m = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

$n = 4$ $\sum y$ =23 $\bar{x} = \frac{12}{4}$ = 3

$\sum xy = 61$ $\sum x^2 = 44$ $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$

$\sum x = 12$ $(\sum x)^2 = 12^2 = 144$

x	y	xy	x^2
3	**5**	**15**	**9**
1	**8**	**8**	**1**
3	**6**	**18**	**9**
5	**4**	**20**	**25**
$\sum x = 12$	$\sum y = 23$	$\sum xy = 61$	$\sum x^2 = 44$

Buscar la pendiente:

$$m = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} = \frac{4(61) - (12)(23)}{4(44) - (144)} = \frac{244 - 276}{176 - 144} = \frac{-32}{32} = -1$$

Buscar el intercepto en y:

$b = \bar{y} - m\bar{x}$

$b = 5.75 - (-1)(3)$

$b = 5.75 - (-3)$

$b = 5.75 + 3$

$b = 8.75$

Con la pendiente y el intercepto en y podemos escribir la ecuación de la línea de mejor ajuste o línea de regresión:

$$\boldsymbol{y = -1x + 8.75}$$

Ejercicios de Práctica 11

A continuación, se presenta la tabla con los pesos y estaturas de ocho estudiantes.

x: peso en kg	72	65	77	80	64	68	76	58
y: estatura en cm	180	158	175	168	170	176	174	159

a) Dibujar el diagrama de dispersión.

b) De acuerdo con el diagrama de dispersión, ¿las variables aparentan estar relacionadas? Explica tu respuesta.

c) Calcular la ecuación de la línea de mejor ajuste.

d) ¿Qué altura es espera que tenga un estudiante cuyo peso es 70 kg?

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

Lección 14: Sistemas de Ecuaciones Lineales en dos variables

Cirque du Soleil

El precio de la entrada a un espectáculo es de \$80 por adulto y \$48 por niño. Ayer asistieron 60 personas y la recaudación total fue de \$4,224. ¿Cuántos adultos y cuántos niños asistieron al espectáculo? ¿Cuál cantidad se recolectó por medio de los adultos y por medio de los niños?

¿Cómo podemos calcular estas cantidades?

En este ejemplo se nos presentan dos incógnitas:

x - adultos

y - niños

Para poder calcular estas cantidades debemos traducir la expresión oral por una expresión algebraica.

Entre niños y adultos tenemos 60 personas

$$adultos + niños = 60$$

$$x \quad + \quad y \quad = \quad 60$$

En cuanto al dinero:

$$\$80\ por\ adulto + \$48\ por\ niño = \$4{,}224$$

$$80x \quad + \quad 48y \quad = \quad 4{,}224$$

si observamos se forman dos ecuaciones lineales con dos variables

El conjunto de dos ecuaciones que contienen las mismas variables se conoce como sistema de dos ecuaciones con dos variables. Estos sistemas están representados por dos rectas en el plano, y la resolución es encontrar los puntos de intersección de ambas rectas.

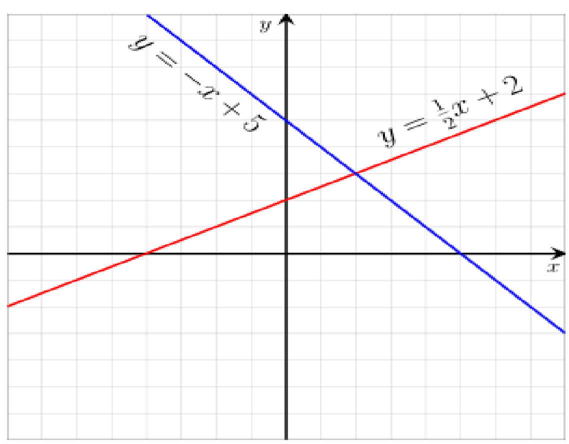
Ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales en dos variables

1. $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ 2x + 20y = 3 \end{cases}$

Características de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

a) Contienen un conjunto de dos o más ecuaciones lineales
b) Las variables en estas ecuaciones provienen de una misma situación problemática y, por lo tanto, están relacionadas. Esto significa que si se afecta una la otra también se afecta.
c) Pueden tener una solución, infinitas soluciones o ninguna solución.
d) La pareja o parejas de números que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones se conocen como solución del sistema.
e) Existen cuatro métodos para resolver un sistema: gráfico, sustitución, igualación y reducción.
f) Los sistemas que tienen una solución o infinitas soluciones se conocen como sistemas **consistentes**. Si un sistema no tiene solución, entonces se conoce como **sistema inconsistente.**
g) Un sistema que tiene infinitas soluciones se conoce como **sistema dependiente**. Los sistemas que tienen solución o soluciones se conocen como **sistemas independientes**.



Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables pueden clasificarse como:

1. **Consistente – independiente**: Estos son los que tienen como gráfica dos rectas que se intersecan en un punto. En este caso el punto de intersección es la solución del sistema. Lo cual significa que ese punto satisface ambas ecuaciones.
2. **Consistente – dependiente**: Estos son los sistemas que tienen como gráfica dos rectas sobrepuestas (una encima de la otra). En este caso las soluciones son infinitas. Los pares ordenados que satisfacen una ecuación también satisfacen la otra.
3. **Inconsistente – independiente**: Estos son los sistemas que tienen como gráfica dos rectas paralelas (no se intersecan). En este caso el sistema no tiene solución. No existe ningún par de coordenadas que satisfagan ambas ecuaciones a la vez (simultáneamente).

Volvamos al problema de inicio sobre el precio de las entradas al espectáculo. Obtuvimos las siguientes ecuaciones:

$x + y = 60 \qquad 80x + 48y = 4{,}224$

El sistema que forman las dos ecuaciones se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 80x + 48y = 4{,}224 \end{cases}$$

¿Cómo vamos a resolver el sistema?

Existen varios métodos, entre ellos se encuentran los siguientes:

1. Método gráfico
2. Método de sustitución
3. Método de igualación
4. Método de reducción o eliminación

Método gráfico

El método gráfico consiste en dibujar las gráficas de cada ecuación en un mismo plano cartesiano. El punto de intersección de las dos rectas será la solución del sistema.

$$x + y = 60$$
$$y = -x + 60$$

$$80x + 48y = 4{,}224$$
$$48y = -80x + 4{,}224$$
$$\frac{48}{48}y = -\frac{80}{48}x + \frac{4{,}224}{48}$$
$$y = -\frac{5}{3}x + 88$$

Construir la tabla de valores

x	y
40	20
41	19
42	18

x	y
40	-21.33
41	-19.67
42	18

$$y = -x + 60$$
$$y = -(40) + 60$$
$$y = -40 + 60$$
$$y = 20$$

$$y = -(41) + 60$$
$$y = 19$$

$$y = -(42) + 60$$
$$y = 18$$

$$y = -\frac{5}{3}x + 88$$
$$y = -\frac{5}{3}(40) + 88$$
$$y = -21.33$$

$$y = -\frac{5}{3}(41) + 88$$
$$y = -19.67$$

$$y = -\frac{5}{3}(42) + 88$$
$$y = 18$$

son iguales

Entonces, el punto $(42, 18)$ es la solución del sistema. Como el sistema tiene una solución se clasifica como **consistente – independiente**.

La cantidad de adultos es de 42, mientras que la cantidad de niños es 18.

Verificamos:

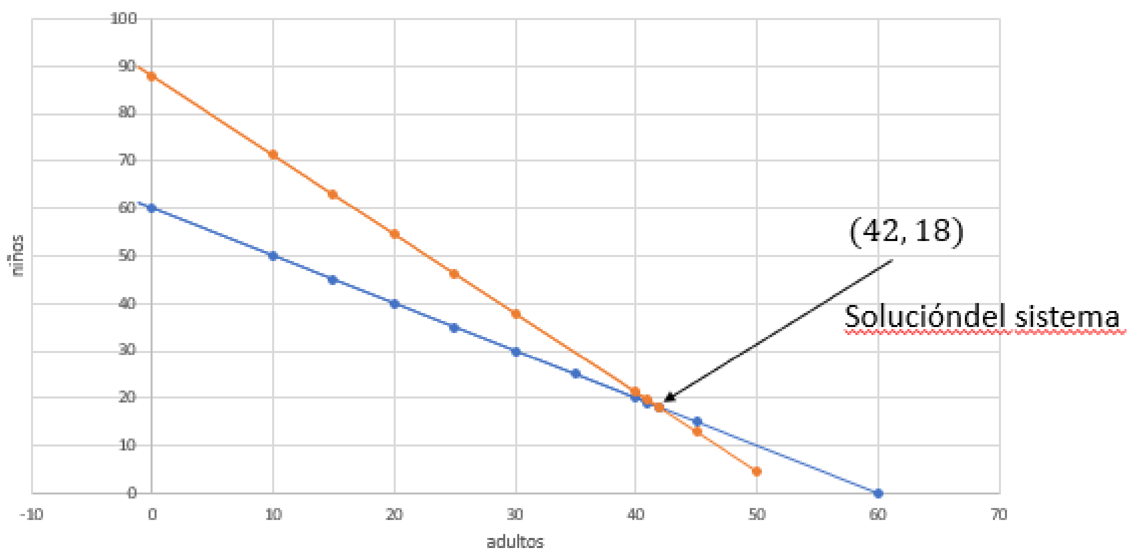
$x + y = 60$

$42 + 18 = 60$

$80x \ + \ 48y \ = \ 4{,}224$
$80(42) + 48(18) = 4{,}224$
$3{,}360 \ + \ 864 = 4{,}224$
$4{,}224 \ = \ 4{,}224$

La cantidad de dinero recolectado de los adultos es de \$3,360 y la cantidad recolectada de los niños es \$864.

La gráfica es la siguiente:



Cuando los valores de las coordenadas son muy altos o son fracciones, el método gráfico resulta complicado, por lo que se pueden utilizar otros métodos.

Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una de las variables en alguna de las dos ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Retomemos el ejemplo anterior de los niños y adultos que asisten al espectáculo.

Las dos ecuaciones son:

$x \ + \ y \ = \ 60$ Escojamos esta ecuación para despejar para y

$80x + 48y = 4{,}224$

$x + y = 60$

$y = -x + 60$ Sustituir esta expresión en la y de la segunda ecuación

$$80x + 48y = 4{,}224$$

$80x + 48(-x + 60) = 4{,}224$ propiedad distributiva

$80x + -48x + 2{,}880 = 4{,}224$ combinar términos semejantes

$32x = 4{,}224 - 2{,}880$

$32x = 1{,}344$ dividir ambos lados por 32

$\frac{32}{32}x = \frac{1{,}344}{32}$

$x = 42$

Sustituir este valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de y. Sustituiremos en la ecuación $x + y = 60$.

$x + y = 60$

$42 + y = 60$ despejar para y

$y = 60 - 42$ propiedad aditiva de la igualdad

$y = 18$

Es importante comprobar la respuesta. Esto se hace sustituyendo el valor de cada variable en ambas ecuaciones originales.

$x + y = 60$

$42 + 18 = 60$

$60 = 60$ Cierto

$80x + 48y = 4{,}224$

$80(42) + 48(18) = 4{,}224$

$3{,}360 + 864 = 4{,}224$

$4{,}224 = 4{,}224$ Cierto

Solución del sistema $(42, 18)$

Método de igualación

Este método consiste en despejar la misma variable en las dos ecuaciones. Se igualan a sus valores quedando una ecuación de primer grado con una variable. Se resuelve esa ecuación hallándose el valor de una variable, luego se sustituye ese valor en una de las dos ecuaciones despejadas, calculándose el valor de la segunda variable.

Ejemplo

$$\begin{cases} x + y = 2 & \text{despejar para } x \quad x = 2 - y \\ x - y = 4 & \text{despejar para } x \quad x = 4 + y \end{cases}$$

Ya tenemos los valores despejados para x, entonces los igualamos:

$2 - y = 4 + y$

$2 - 4 = y + y$

$2 + \ -4 = 2y$

$-2 = 2y$

$\frac{-2}{2} = \frac{2}{2}y$

$-1 = y$

$y = -1$

Ya tenemos el valor de y, entonces buscamos el valor de x sustituyendo el valor de y en cualquiera de las ecuaciones originales.

$x + y = 2$

$x + (-1) = 2$

$x = 2 + 1$

$x = 3$

La solución del sistema es $(3, -1)$.

Método de reducción o eliminación

https://www.youtube.com/watch?v=0ilTVp5uRz8

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de reducción o eliminación debemos seguir los siguientes pasos:

1. Observar las ecuaciones y verificar si alguna de las variables se puede multiplicar por un número real, de manera tal que tenga el mismo coeficiente numérico con signo opuesto que tiene la otra ecuación en la misma variable.
   En el caso de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ -2x+y=4 \end{cases}$$

en este caso podemos multiplicar la primera ecuación por 2 o la segunda ecuación por -3

Si se multiplica la primera ecuación por 2, tenemos:

$$\begin{cases} 2(x+3y=5) \\ -2x+y=4 \end{cases}$$

Se multiplica toda la ecuación por 2

$$\begin{cases} 2x+6y=10 \\ -2x+y=4 \end{cases}$$

Observemos que, las x tienen el mismo coeficiente con signo opuesto.

2. Sumar ambas ecuaciones para eliminar una de las variables, en este caso x.

$$\begin{cases} 2x+6y=10 \\ -2x+y=4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2x}+6y=10 \\ +\quad -\cancel{2}x+y=4 \\ \hline 7y=14 \end{array}$$

Recordemos

Cuando se suma un número con su opuesto el resultado es cero.

$2+(-2)=0$

3. Resolver la ecuación resultante: $7y=14$

   $7y=14$ dividir ambos lados por 7

$$\frac{7}{7}y=\frac{14}{7}$$

$$y=2$$

4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable. Podemos seleccionar cualquiera de las ecuaciones originales.

$x + 3y = 5$

$x + 3\,(2) = 5$

$x + 6 = 5$

$x = 5 - 6$

$x = 5 + (-6)$

$x = -1$

5. Verificar la solución: la solución es $(-1, 2)$.

$x + 3y = 5$	$-2x + y = 4$
$-1 + 3(2) = 5$	$-2(-1) + 2 = 4$
$-1 + 6 = 5$	$2 + 2 = 4$
$5 = 5$ correcto	$4 = 4$ correcto

Resolver los siguientes sistemas por el método de eliminación.

1. $\begin{cases} 8x - 6y = 4 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$ Podemos multiplicar la segunda ecuación por -2

$$\begin{cases} 8x - 6y = 4 \\ -2(4x - 3y = 2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 8x - 6y = 4 \\ -8x + 6y = -4 \end{cases}$$ sumar ambas ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 8x - 6y & = & 4 \\ + \quad -8x + 6y & = & -4 \\ \hline 0 + 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Si esto ocurre, el sistema tiene infinitas soluciones.

Es consistente – dependiente.

2. $\begin{cases} 8x - 6y = 4 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$ Multiplicar la segunda ecuación por -2

$\begin{cases} 8x - 6y = 4 \\ -2(4x - 3y = 3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 8x - 6y = \ \ 4 \\ -8x + 6y = -6 \end{cases}$ sumar ambas ecuaciones

$$\begin{array}{rr} & 8x - 6y = 4 \\ + & -8x + 6y = -6 \\ \hline & 0 + 0 = -2 \\ & 0 = -2 \end{array}$$

Si esto ocurre, entonces el sistema no tiene solución. Es un sistema inconsistente.

Ejercicios de Práctica 12

A. Resuelve cada sistema con el método indicado.

1. Método gráfico

a. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ -4x + 2y = 4 \end{cases}$

2. Método de sustitución

b. $\begin{cases} 4x - y = -11 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$

3. Método de igualación

c. $\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$

4. Método de reducción o eliminación

d. $\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ 5x - 3y = 10 \end{cases}$

B. Resuelve el problema. Usa el método que prefieras.

Para un juego de baloncesto se vendieron 1,850 boletos. Se recaudó un total de $8,800. Si los boletos de niños cuestan $4 y los de adultos cuestan $6, ¿cuántos boletos de cada clase se vendieron?

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo

Prueba 5: Regresión lineal y Sistemas de ecuaciones Total 50 puntos

A. A continuación, se presenta la tabla con las puntuaciones de siete estudiantes en las clases de Física y Matemáticas. 20 pts.

x: puntuación en Física	80	91	96	72	64	90	87
y: puntuación en Matemáticas	82	89	97	69	65	95	85

1. Dibujar el diagrama de dispersión. 5 pts.
2. De acuerdo con el diagrama de dispersión, ¿las variables aparentan estar relacionadas? Explica tu respuesta. 5 pts.
3. Calcular la ecuación de la línea de mejor ajuste. 5 pts.
4. ¿Qué puntuación es espera que tenga un estudiante en Matemáticas si su puntuación en Física es de 45? 5 pts.

B. Resolver cada sistema de ecuaciones en dos variables. Utilizar el método preferido. 25 pts.

1. $\begin{cases} 2x = -y - 8 \\ 6x + 5y = 8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - 4y = 8 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x + 8y = 3 \\ 14x + 16y = 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3y + 4x = 27 \\ 4y - 4x = 8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 4x - 10y = 8 \end{cases}$

C. Resuelve el problema y comprueba la respuesta. 5 pts.
En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas son 50, si se cuentan las patas son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Proyecto Especial   36 puntos

Para realizar este proyecto debes seguir las siguientes instrucciones:

1. Preguntar a 20 personas (pueden ser familiares, amigos, vecinos, etc.) su peso en libras y su estatura en pulgadas.

2. Construir una tabla para los datos obtenidos: x será el peso en libras y y será la estatura en pulgadas. 10 pts.

3. Construir un diagrama de dispersión para determinar si existe relación entre los datos. 10 pts.

4. Determinar si existe relación entre los pesos y la estatura de las 20 personas que seleccionaste. Explica cómo es la relación y si no existe ninguna, explica a qué se debe, según tus criterios. 10 pts.

5. Encuentra la media para los pesos y la media para las estaturas. 6 pts.

CLAVES DE RESPUESTA DE EJERCICIOS DE EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Ejercicios Práctica 1

A. Clasifica como racional (Q) o irracional (I).

1. I
2. Q
3. Q
4. Q
5. I
6. Q
7. Q
8. I
9. Q
10. Q

B. Identifica cuál propiedad de los números reales se ilustra en los siguientes enunciados.

1. Distributiva
2. Inverso aditivo
3. Inverso multiplicativo
4. Conmutativa de la multiplicación
5. Conmutativa de la adición
6. Elemento identidad de la suma
7. Asociativa

C. Escribe cierto o falso (C) o (F).

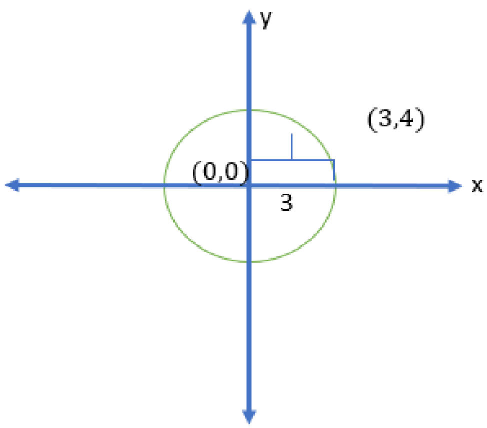
1. C
2. F
3. F
4. C
5. F
6. C
7. C
8. F
9. C
10. C

Ejercicios Práctica 2

A. Encuentra la distancia entre los dos puntos. Redondear a dos lugares decimales.

1. 12.81
2. 5.83
3. 11.00
4. 8.25
5. 3.06

B. Resuelve



Hay que buscar la distancia desde el punto (0,0) al punto (3,4).
La distancia encontrada con la fórmula es 5, está más lejos que el radio, por lo tanto, el punto se encuentra en el exterior de la circunferencia.

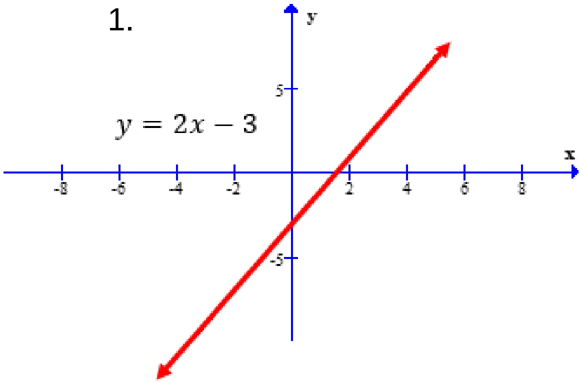
C. Halla el punto medio

1. $PM = \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right)$
2. $PM = (-12, 21)$
3. $PM = (6, 5)$
4. $PM = (-8, 8)$
5. $PM = (7, 10\ )$

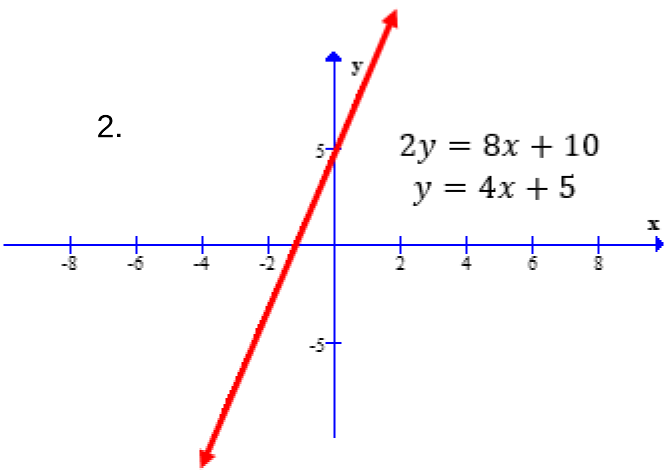
Ejercicios Práctica 3

Dibuja la gráfica de cada ecuación.

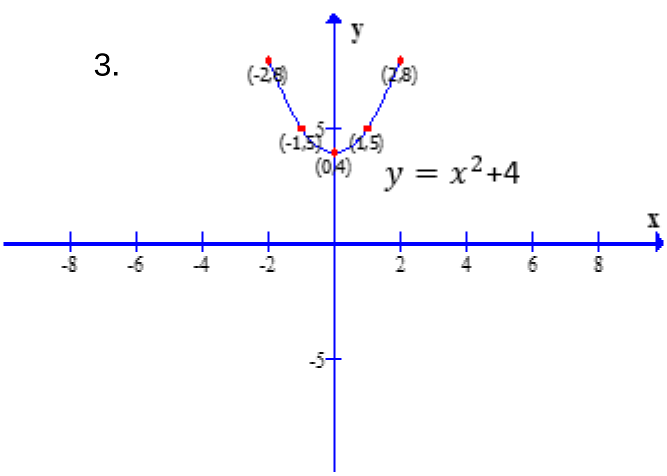
1.



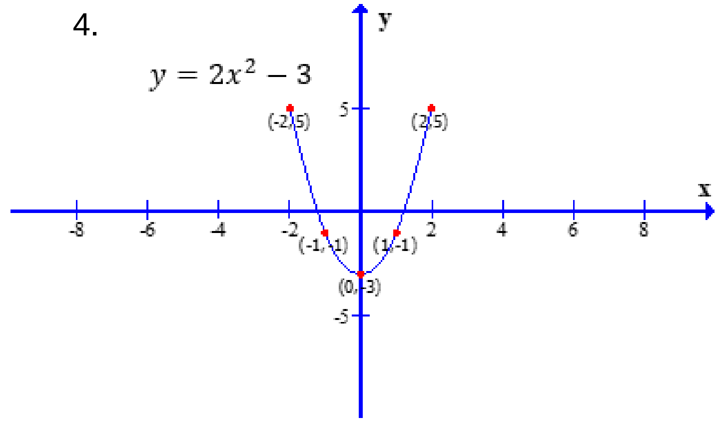
2.



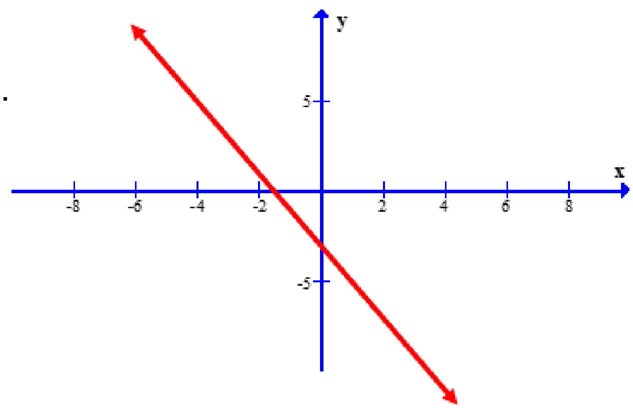
3.



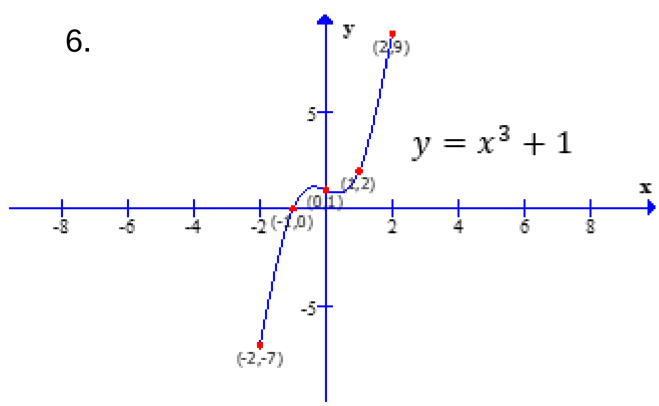
4.



5.



6.



Ejercicios Práctica 4

A. Indicar el dominio (D) y campo de valores (CV) de las siguientes relaciones.

1. $D: \left\{4, 0, 10, \frac{1}{5}, 0\right\}$ $CV: \{-1, 6, 3, -5, 0\}$
2. $D: \{A, B, C, D\}$ $CV: \{2, 4, 6, 8\}$
3. $D: \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $CV: \{2, 4, 6, 8, 10\}$
4. $D: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots\}$ $CV: \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$
5. $D: \{a.\ e, x, r, h, m, o\}$ $CV: \{b, f, y, s, i, n, p\}$

B. Determinar si las siguientes relaciones son funciones o no.

1. Sí
2. Sí
3. No
4. Sí
5. No

C. Si $f(x) = 12 - 3x$ y $g(x) = x^2 + 2$, evalúa $f(3), f(5), f(0), g(1), g(-2)$ y $g(10)$.

$f(3) = 12 - 3(3)$ $f(5) = 12 - 3(5)$ $f(0) = 12 - 3(0)$

$= 12 - 9$ $= 12 - 15$ $= 12 - 0$

$= 3$ $= -3$ $= -12$

$g(1) = 1^2 + 2$ $g(-2) = (-2)^2 + 2$ $g(10) = (10)^2 + 2$

$= 1 + 2$ $= 4 + 2$ $= 100 + 2$

$= 3$ $= 6$ $= 102$

Ejercicios Práctica 5

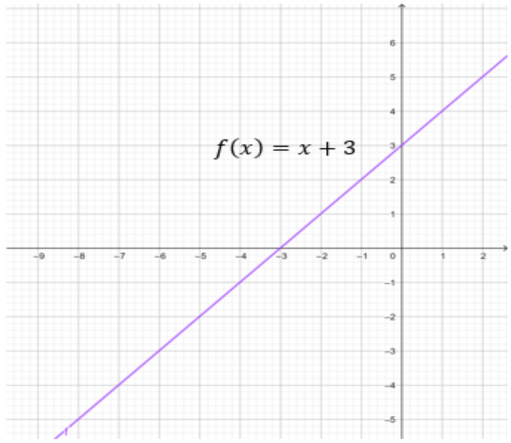
A. ¿A cuál familia pertenecen las siguientes funciones?

1. $f(x) = 2x^2 - 7$ función cuadrática
2. $g(x) = |x - 4|$ función valor absoluto
3. $h(x) = 4x + 6$ función lineal
4. $d(x) = x^3 + 2$ función cúbica
5. $n(x) = 9$ función constante
6. $m(x) = \frac{4}{x+3}$ función racional
7. $p(x) = \sqrt{x - 7}$ función radical

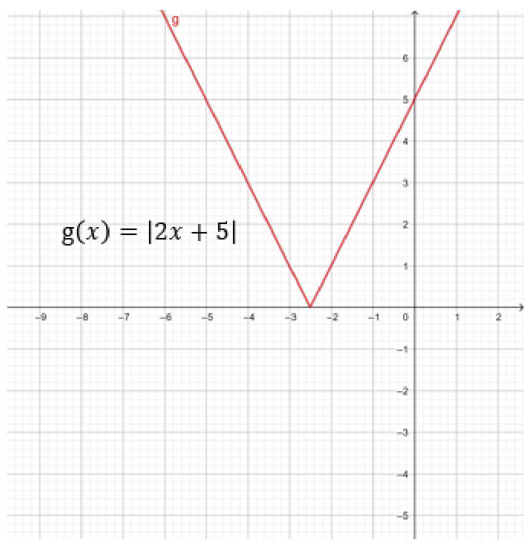
D. Haz una gráfica de cada función. Luego describe la transformación.

1. $f(x) = x + 3$ traslación vertical
2. $g(x) = |2x + 5|$ encogimiento y traslación horizontal
3. $h(x) = -(x^2 - 1)$ reflexión vertical y traslación horizontal hacia la derecha
4. $r(x) = \frac{1}{x+4}$ traslación horizontal hacia la izquierda
5. $k(x) = \sqrt{2(x + 1)}$ encogimiento y traslación horizontal hacia la izquierda

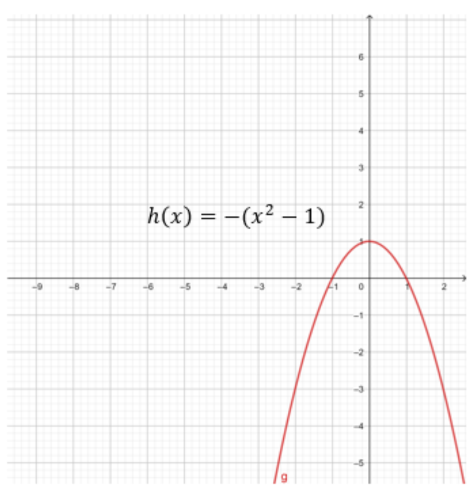
Gráfica 1



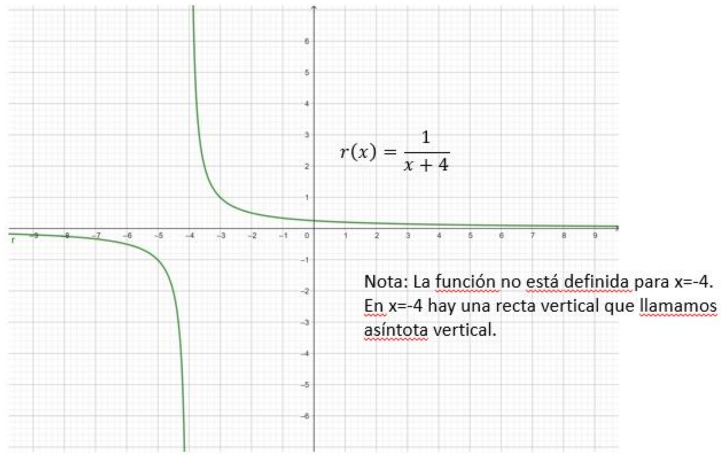
Gráfica 2



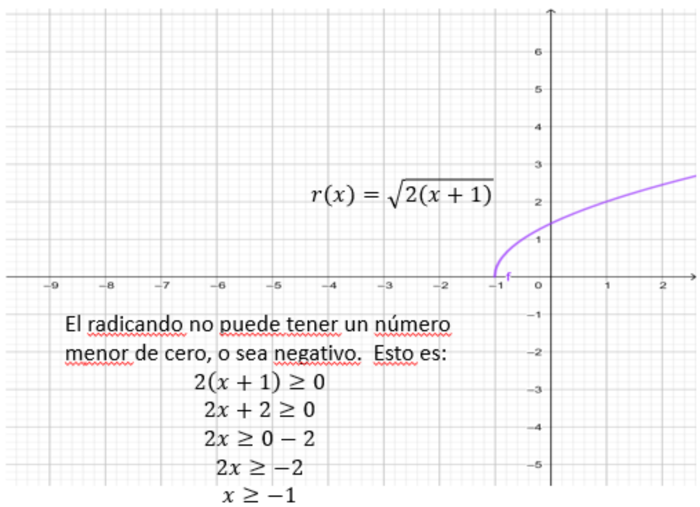
Gráfica 3



Gráfica 4



Gráfica 5



E. Dadas $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x^2 + 5x + 6$, encontrar:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - 4) + (x^2 + 5x + 6) = 2x^2 + +5x + 2$

2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 4) - (x^2 + 5x + 6) = x^2 - 4 - x^2 - 5x - 6$

$= -5x - 10$

3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 5x + 6)$

$= x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x^2 - 20x - 24 = x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} = \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \frac{x-2}{x+3}$

Ejercicios Práctica 6

A. Determina si la función es par, impar o ninguna. Realiza el procedimiento.

1. $f(x) = -x^2 + 5$

   Probar si es par: $f(x) = f(-x)$

   $f(x) = -x^2 + 5 \qquad f(-x) = -(-x)^2 + 5$

   $-x^2 + 5 = -x^2 + 5$ son iguales, la función es par (podemos sustituir x por un número y probar), ejemplo: x = 2

   $f(2) = f(-2)$

   $-(2^2) + 5 = -(-2^2) + 5$

   $-4 + 5 = -4 + 5$

   $1 = 1$ como es par no hay que probar si es impar

2. $f(x) = x^4 - 5x^3$

   Probar si es par:

   $f(x) = f\ (-x)$

   $x^4 - 5x^3 = (-x)^4 - 5(-x)^3$

   $x^4 - 5x^3 = x^4 - 5(-x^3)$

   $x^4 - 5x^3 = x^4 + 5x^3$

   no son iguales, no es par

   Probar si es impar

   $f\ (-x) = -f\ (x)$

   $x^4 + 5x^3 = -(x^4 - 5x^3)$

   $x^4 + 5x^3 = -x^4 + 5x^3$

   no es impar

3. $f(x) = 2x^5$

   Probar si es par:

   $f(x) = f(-x)$

   $2x^5 = 2(-x)^5$

   $2x^5 = 2(-x^5)$

   $2x^5 = -2x^5$ no es par

   Probar si es impar:

   $f\ (-x) = -f\ (x)$

   $2(-x)^5 = -(2x^5)$

   $2(-x^5) = -2x^5$

   $-2x^5 = -2x^5$ es impar

4. $f(x) = -x^6 - 10$

Probar si es par:

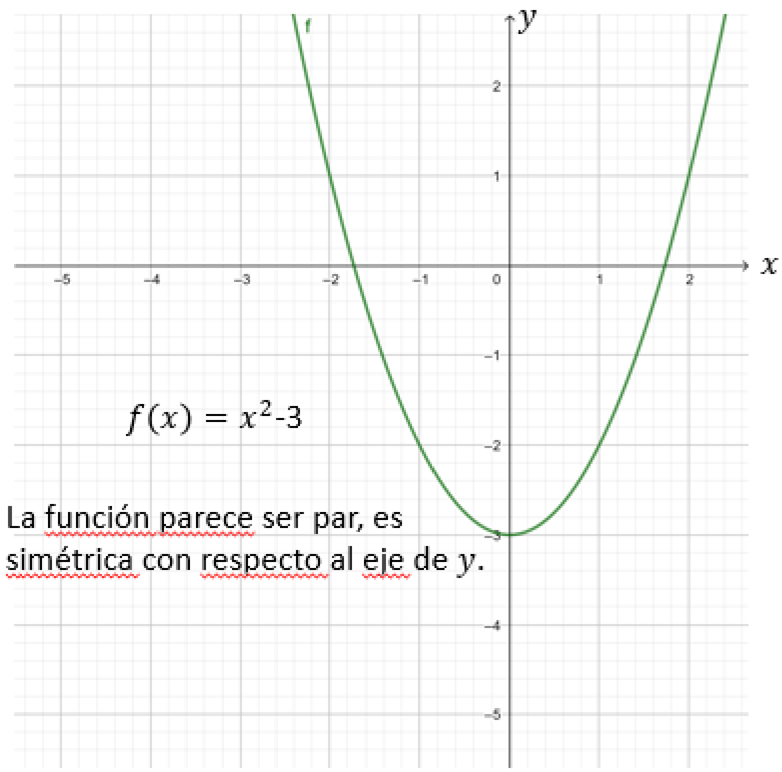
$f(x) = f(-x)$

$-x^6 - 10 = -(-x)^6 - 10$

$-x^6 - 10 = -(x^6) - 10$

$-x^6 - 10 = -x^6 - 10$ es par

B. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3$ y mediante la observación y el análisis determina si la función es par, impar o ninguna. Explica tu respuesta.



Ejercicios Práctica 7

A. Suponga que las lecturas de termómetros se distribuyen normalmente, con una media de 0˚C y una desviación estándar de 1˚C. Se selecciona aleatoriamente un termómetro y se prueba. Calcule la probabilidad indicada, donde Z es la lectura en grados.

1. $Z < 1.96 = 0.9750$ 97.50%

2. $Z < 1.57 = 0.9418$ 94.18%

3. $Z < 1.65 = 0.9505$ 95.05%

4. $Z < 0.00 = 0.500$ 50.00%

B. Se analizaron los resultados de la prueba para admisión universitaria (College Board) en Matemáticas y se determinó una media igual a 560 y una desviación estándar de 10. Si los estudiantes obtuvieron las siguientes puntuaciones, estandariza cada una de ellas (hallar Z).

1. Ileana – 570

$$Z = \frac{570 - 560}{10} = \frac{10}{10}$$

$$= 1\ significa\ 1\ desviación\ estándar\ por\ arriba\ de\ la\ media$$

2. Ángel – 555

$$Z = \frac{555 - 560}{10} = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2}$$

$$= -0.50\ está\ media\ desviación\ estándar\ por\ debajo\ de\ la\ media$$

3. Wanda – 560

$$Z = \frac{560 - 560}{10} = \frac{0}{10} = 0.00\ se\ encuentra\ exactamente\ en\ la\ media$$

4. Diego – 585

$$Z = \frac{585 - 560}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2.50$$

$$2.50 \quad la\ puntuación\ está\ a\ dos\ y\ media\ desviaciones\ estándar\ por\ arriba\ de\ la\ media$$

5. Carlos – 565

$$Z = \frac{565 - 560}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$= 0.50\ significa\ que\ se\ encuentra\ a\ media\ desviación\ estándar\ por\ arriba\ de\ la\ media$$

C. La media de las edades de 500 estudiantes de una escuela es 12 años y la desviación típica o estándar es 2 años. Suponiendo que las edades se distribuyen normalmente, hallar cuál es la probabilidad de que haya estudiantes con 14 años menos.

$\mu = 18$ $\sigma = 2$ $Z = \frac{14-12}{2} = \frac{2}{2} = 1.00$ esto es en la tabla 0.8413 = 84.13%

=

Ejercicios Práctica 8

A.

1. $m = \frac{-3-(-4)}{4-(3)} = \frac{-3+4}{4-3} = \frac{1}{1} = 1$
2. $m = \frac{0-0}{14-3} = \frac{0}{11} = 0$
3. $m = \frac{-5-(5)}{-5-(5)} = \frac{-5+-5}{-5+-5} = \frac{-10}{-10} = 1$
4. $m = \frac{10-4}{1-1} = \frac{6}{0} = indefinida$
5. $m = \frac{6-6}{7-9} = \frac{0}{7+-9} = \frac{0}{-2} = 0$

B.

1. $(6,2) y\ (3,4) = \frac{4-2}{3-6} = \frac{2}{3+-6} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$
2. $(-4,5) y\ (3,-8) = \frac{-8-5}{3-(-4)} = \frac{-8+-5}{3+4} = \frac{-13}{7} = -\frac{13}{7}$

C. $(3, y)\ y\ (6,8)$ $\qquad$ $m = 2$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$2 = \frac{8-y}{6-3}$$

$$2 = \frac{8-y}{3}$$

$$(3)(2) = (\cancel{3})\frac{(8-y)}{\cancel{3}}$$ Multiplicar por 3 a ambos lados

$$6 = 8 - y$$

$$y = 8 - 6$$

$$y = 2$$

Ejercicios Práctica 9

A. Determinar la pendiente de la recta, el intercepto en y, la ecuación y dibujar la gráfica.

2. Pasa por el punto (4,6) y tiene una pendiente igual a 2.

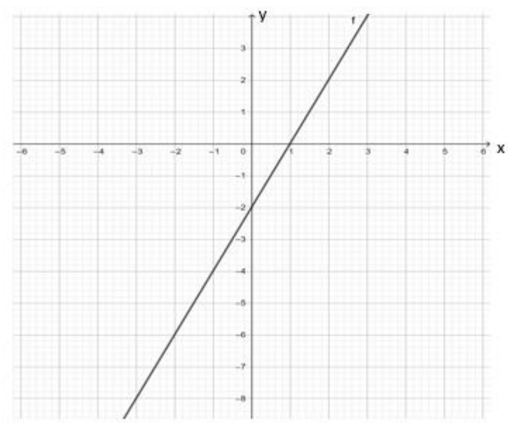
$m = 2$ $\quad x_1 = 4$ $\quad y_1 = 6$ $\quad usar: y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 6 = 2(x - 4)$

$y - 6 = 2x - 8$

$y = 2x - 8 + 6$

$y = 2x - 2$ $\quad$ intercepto en y: $b = -2$



B. Determina la pendiente y el intercepto en y de cada ecuación.

$a.\ y = 5x + 8$ $\quad m = 5 \quad b = 8$

$b.\ y = -2x + 7$ $\quad m = -2 \quad b = 7$

$c.\ 2y = 8x - 10$ $\quad m = 4 \quad b = -5$

$d.\ 8x + 3y = -10$ $\quad m = -\frac{8}{3} \quad b = -\frac{10}{3}$

Ejercicios Práctica 10

A. Indica si x y y muestran variación directa, indirecta o ninguna de las dos.

1. $y = \frac{2}{x}$ inversa

3. $xy = 12$ inversa

2. $\frac{y}{x} = 8$ directa

4. $y = x + 4$ ninguna

5.

x	-4	-3	-2	-1
y	20	15	10	5

directa

B. Las variables x y y son inversamente proporcionales. Usa los valores dados para escribir una ecuación que relaciones x y y. Luego encuentra $x = 3$.

1. $x = -3, \quad y = 8$

$$y = \frac{a}{x}$$

$$8 = \frac{a}{-3} \; multiplicar\ ambos\ lados\ por - 3\ para\ encontrar\ a$$

$$(-3)(8) = a$$

$$-24 = a$$

La ecuación es: $y = \frac{-24}{x}$

2. $x = 1, \quad y = 9$

$$y = \frac{a}{x}$$

$$9 = \frac{a}{1}$$

$$9 = a$$

La ecuación es: $y = \frac{9}{x}$

3. $x = -4, \ \ y = -\frac{5}{4}$

$y = \frac{a}{x}$

$-\frac{5}{4} = \frac{a}{-4}$

$(-4)\left(-\frac{5}{4}\right) = a$

$(-\cancel{4})\left(-\frac{5}{\cancel{4}}\right) = a$

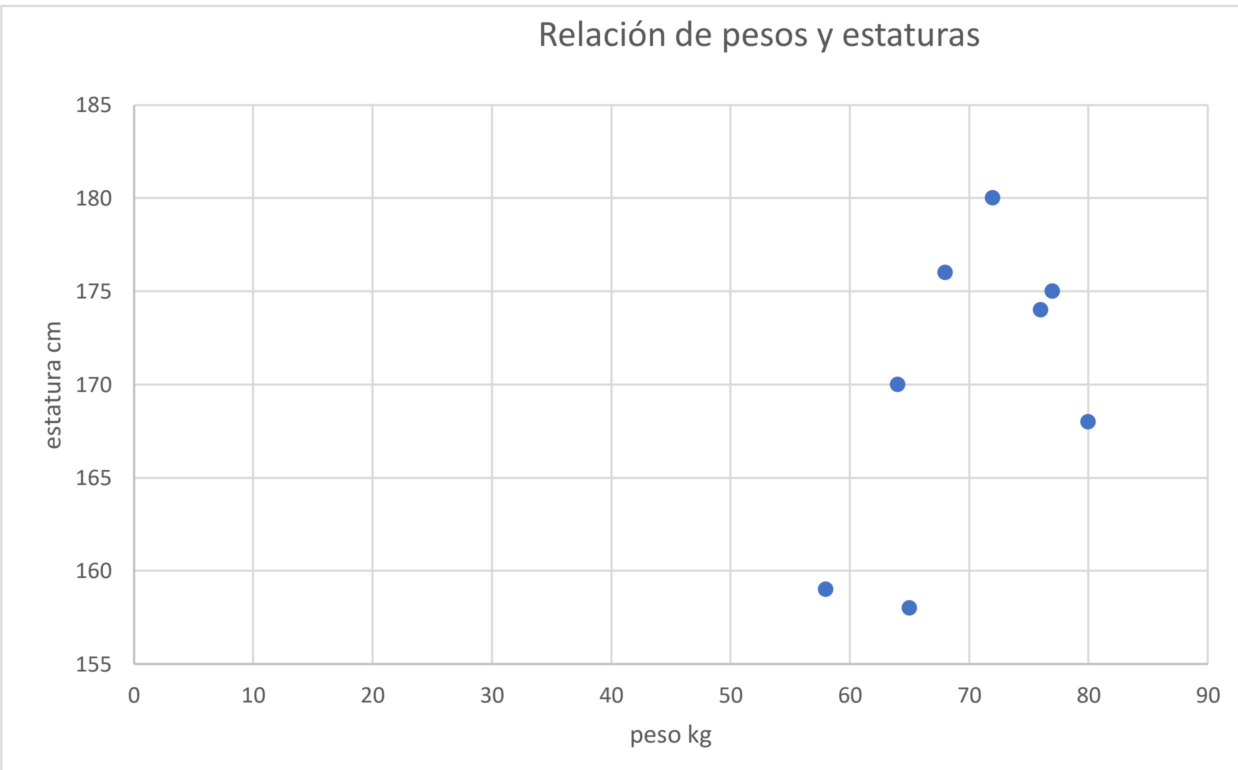
$a = 5$ La ecuación es: $y = \frac{5}{x}$

Ejercicios Práctica 11

A continuación, se presenta la tabla con los pesos y estaturas de ocho estudiantes.

x: peso en kg	72	65	77	80	64	68	76	58
y: estatura en cm	180	158	175	168	170	176	174	159

a) Dibujar el diagrama de dispersión.



b) De acuerdo con el diagrama de dispersión, ¿las variables aparentan estar relacionadas? Explica tu respuesta.

Parece que se relacionan. A medida que los pesos aumentan la estatura también aumenta.

c) Calcular la ecuación de la línea de mejor ajuste.

x	y	xy	x^2
$\sum x = 560$	$\sum y = 1{,}360$	$\sum xy = 95{,}439$	$\sum x^2 = 39{,}598$

$n = 8$

$(\sum x)^2 = 313{,}600$

$\bar{x} = \frac{560}{8} = 70$ $\quad\quad\quad\quad$ $\bar{y} = \frac{1{,}360}{8} = 170$

$$m = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2)(\sum x)^2} = \frac{8(95{,}439) - (560)(1{,}360)}{8(39{,}598) - (313{,}600)}$$

$$= \frac{763{,}512 - 761{,}600}{316{,}784 - 313{,}600} = \frac{1{,}912}{3{,}184} = 0.6 \quad\quad pendiente$$

(La pendiente está redondeada a una décima)

$b = \bar{y} - m\bar{x}$

$b = 170 - 0.6(70)$

$b = 170 - 42$

$b = 128$ *Intercepto en* y

La ecuación de la línea de mejor ajuste es: $y = 0.6x + 128$

d) ¿Qué altura es espera que tenga un estudiante cuyo peso es 70 kg?

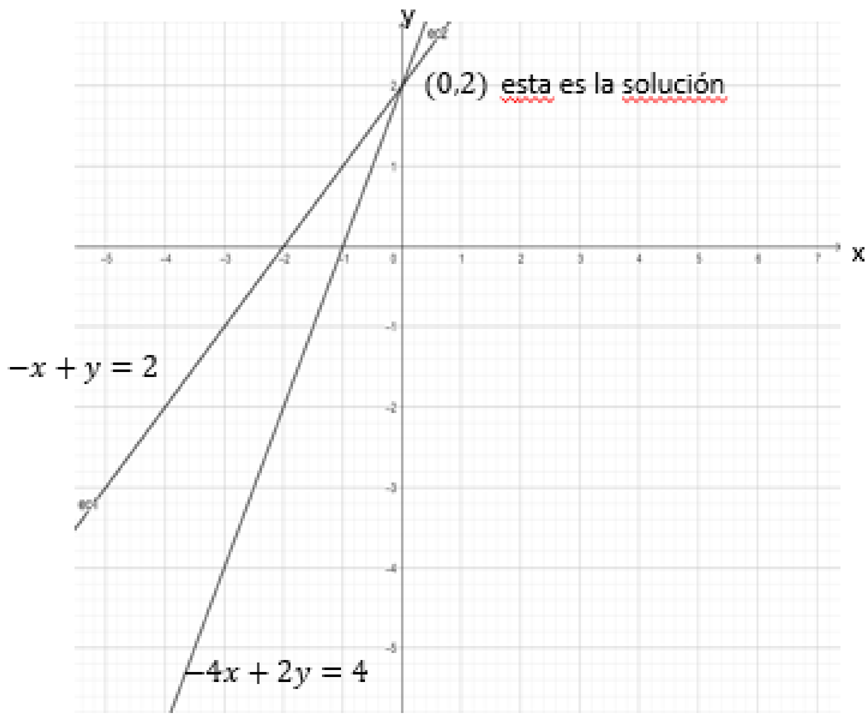
$y = 0.6(70) + 128$

$y = 42 + 128$

$y = 170\ cm$

Ejercicios Práctica 12

1. Método gráfico



2. Método de sustitución

$4x - y = -11$

$3x - 2y = -7$

Despejar para y la primera ecuación $y = 4x + 11$

Sustituir en la segunda ecuación:

$3x - 2(4x + 11) = -7$

$3x - 8x - 22 = -7$

$-5x = -7 + 22$

$-5x = 15$ dividir ambos lados por -5

$x = -3$

Sustituir el valor de x en cualquiera de las ecuaciones para obtener el valor de y:

$4x - y = -11$ $\quad\quad -1 = y$

$4(-3) - y = -11$ $\quad\quad y = -1$

$-12 - y = -11$

$-12 + 11 = y$ $\quad\quad$ Solución: $(-3, -1)$

3. Método de igualación

$x + y = 9$ Despejar ambas ecuaciones para y

$2x + y = 12$ $y = 9 - x$ $y = 12 - 2x$ Igualar las y

$9 - x = 12 - 2x$ Resolver para x

$$-x + 2x = 12 - 9$$

$$x = 3$$

Sustituir el valor de x en cualquiera de las ecuaciones para hallar el valor de y.

$$x + y = 9$$

$$3 + y = 9$$

$$y = 9 - 3$$

$$y = 6$$

La solución es $(3,6)$

4. Método de reducción o eliminación

$2x + 6y = 4$ Podemos eliminar las y multiplicando la segunda ecuación

$5x - 3y = 10$ por 2 y luego, sumar ambas ecuaciones.

$$2x + 6y = 4$$

$$(2)(5x - 3y = 10)$$

$$2x + 6y = 4$$

$10x - 6y = 20$ sumar ambas ecuaciones

$$12x = 24$$

$$\frac{12}{12}x = \frac{24}{12}$$

$$x = 2$$

Sustituir el valor de x en cualquiera de las ecuaciones para encontrar el valor de y.

$$2x + 6y = 4$$

$$2(2) + 6y = 4$$

$$4 + 6y = 4$$

$$6y = 4 - 4$$

$$6y = 0$$

$$y = \frac{0}{6}$$

$y = 0$ La solución es $(2,0)$

C. Resuelve el problema. Usa el método que prefieras.

Para un juego de baloncesto se vendieron 1,850 boletos. Se recaudó un total de $8,800. Si los boletos de niños cuestan $4 y los de adultos cuestan $6, ¿cuántos boletos de cada clase se vendieron?

$x = 1{,}150 \qquad y = 700$

La solución es $(1150, 700)$ Se vendieron 1,150 boletos de niños y 700 boletos de adultos.

REFERENCIAS

Larson, R., & Boswell, L. (2015). *Álgebra 2: Big Ideas* (1st ed., pp. 3-365). Pensylvannia: Big Ideas Learning.

Ediciones Santillana, Inc. (2012). Álgebra. 1st ed, pp. 24-408). México, Editorial Impresora Apolo.

Recursos de internet:

https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-9-14_RESOURCE/U09_L1_T3_text_final_es.html

http://miseguimientodeplanocartesiano.blogspot.com/2018/11/aplicaciones-en-la-vida-cotidiana.html

https://www.youtube.com/watch?v=BNo_QKFvDx0

https://www.ecuacionesresueltas.com/sistemas/nivel-1/sistemas-ecuaciones-metodo-sustitucion-explicado-ejemplos-problemas.html

https://www.ecuacionesresueltas.com/sistemas/nivel-2/sistemas-ecuaciones-metodo-igualacion-explicado-ejemplos-problemas-resueltos.html

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/sistemas/metodo-de-reduccion.html

https://www.ecuacionesresueltas.com/sistemas/nivel-3/sistemas-ecuaciones-metodo-reduccion-explicado-ejemplos.html

https://www.freepik.com/

Estimada familia:

El Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) tiene como prioridad el garantizar que a sus hijos se les provea una educación pública, gratuita y apropiada. Para lograr este cometido, es imperativo tener presente que los seres humanos son diversos. Por eso, al educar es necesario reconocer las habilidades de cada individuo y buscar estrategias para minimizar todas aquellas barreras que pudieran limitar el acceso a su educación.

La otorgación de acomodos razonables es una de las estrategias que se utilizan para minimizar las necesidades que pudiera presentar un estudiante. Estos permiten adaptar la forma en que se presenta el material, la forma en que el estudiante responde, la adaptación del ambiente y lugar de estudio y el tiempo e itinerario que se utiliza. Su función principal es proveerle al estudiante acceso equitativo durante la enseñanza y la evaluación. Estos tienen la intención de reducir los efectos de la discapacidad, excepcionalidad o limitación del idioma y no, de reducir las expectativas para el aprendizaje. Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, se debe tener altas expectativas con nuestros niños y jóvenes.

Esta guía tiene el objetivo de apoyar a las familias en la selección y administración de los acomodos razonables durante el proceso de enseñanza y evaluación para los estudiantes que utilizarán este módulo didáctico. Los acomodos razonables le permiten a su hijo realizar la tarea y la evaluación, no de una forma más fácil, sino de una forma que sea posible de realizar, según las capacidades que muestre. El ofrecimiento de acomodos razonables está atado a la forma en que su hijo aprende. Los estudios en neurociencia establecen que los seres humanos aprenden de forma visual, de forma auditiva o de forma kinestésica o multisensorial, y aunque puede inclinarse por algún estilo, la mayoría utilizan los tres.

Por ello, a continuación, se presentan algunos ejemplos de acomodos razonables que podrían utilizar con su hijo mientras trabaja este módulo didáctico en el hogar. Es importante que como madre, padre o persona encargada en dirigir al estudiante en esta tarea los tenga presente y pueda documentar cuales se utilizaron. Si necesita más información, puede hacer referencia a la ***Guía para la provisión de acomodos razonables*** (2018) disponible por medio de la página www.de.pr.gov, en educación especial, bajo Manuales y Reglamentos.

GUÍA DE ACOMODOS RAZONABLES PARA LOS ESTUDIANTES QUE TRABAJARÁN BAJO MÓDULOS DIDÁCTICOS

Acomodos de presentación	Acomodos en la forma de responder	Acomodos de ambiente y lugar	Acomodos de tiempo e itinerario
Cambian la manera en que se presenta la información al estudiante. Esto le permite tener acceso a la información de diferentes maneras. El material puede ser presentado de forma auditiva, táctil, visual o multisensorial.	Cambian la manera en que el estudiante responde o demuestra su conocimiento. Permite a los estudiantes presentar las contestaciones de las tareas de diferentes maneras. Por ejemplo, de forma verbal, por medio de manipulativos, entre otros.	Cambia el lugar, el entorno o el ambiente donde el estudiante completará el módulo didáctico. Los acomodos de ambiente y lugar requieren de organizar el espacio donde el estudiante trabajará.	Cambian la cantidad de tiempo permitido para completar una evaluación o asignación; cambia la manera, orden u hora en que se organiza el tiempo, las materias o las tareas.
Aprendiz visual: ▪ Usar letra agrandada o equipos para agrandar como lupas, televisores y computadoras ▪ Uso de láminas, videos pictogramas. ▪ Utilizar claves visuales tales como uso de colores en las instrucciones, resaltadores (highlighters), subrayar palabras importantes. ▪ Demostrar lo que se espera que realice el estudiante y utilizar modelos o demostraciones. ▪ Hablar con claridad, pausado ▪ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante ▪ Añadir al material información complementaria **Aprendiz auditivo**: ▪ Leerle el material o utilizar aplicaciones	**Aprendiz visual:** ▪ Utilizar la computadora para que pueda escribir. ▪ Utilizar organizadores gráficos. ▪ Hacer dibujos que expliquen su contestación. ▪ Permitir el uso de láminas o dibujos para explicar sus contestaciones ▪ Permitir que el estudiante escriba lo que aprendió por medio de tarjetas, franjas, láminas, la computadora o un comunicador visual. ▪ Contestar en el folleto. **Aprendiz auditivo**: ▪ Grabar sus contestaciones ▪ Ofrecer sus contestaciones a un adulto que documentará por escrito lo mencionado.	**Aprendiz visual:** ▪ Ambiente silencioso, estructurado, sin muchos distractores. ▪ Lugar ventilado, con buena iluminación. ▪ Utilizar escritorio o mesa cerca del adulto para que lo dirija. **Aprendiz auditivo**: ▪ Ambiente donde pueda leer en voz alta o donde pueda escuchar el material sin interrumpir a otras personas. ▪ Lugar ventilado, con buena iluminación y donde se les permita el movimiento mientras repite en voz alta el material. **Aprendiz multisensorial:** ▪ Ambiente se le permita moverse,	**Aprendiz visual y auditivo:** ▪ Preparar una agenda detalladas y con códigos de colores con lo que tienen que realizar. ▪ Reforzar el que termine las tareas asignadas en la agenda. ▪ Utilizar agendas de papel donde pueda marcar, escribir, colorear. ▪ Utilizar "post-it" para organizar su día. ▪ Comenzar con las clases más complejas y luego moverse a las sencillas. ▪ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas. **Aprendiz multisensorial:** ▪ Asistir al estudiante a organizar su trabajo con agendas escritas o electrónicas.

Acomodos de presentación	Acomodos en la forma de responder	Acomodos de ambiente y lugar	Acomodos de tiempo e itinerario
que convierten el texto en formato audible. ▪ Leer en voz alta las instrucciones. ▪ Permitir que el estudiante se grabe mientras lee el material. ▪ Audiolibros ▪ Repetición de instrucciones ▪ Pedirle al estudiante que explique en sus propias palabras lo que tiene que hacer ▪ Utilizar el material grabado ▪ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante **Aprendiz multisensorial:** ▪ Presentar el material segmentado (en pedazos) ▪ Dividir la tarea en partes cortas ▪ Utilizar manipulativos ▪ Utilizar canciones ▪ Utilizar videos ▪ Presentar el material de forma activa, con materiales comunes. ▪ Permitirle al estudiante investigar sobre el tema que se trabajará ▪ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante	▪ Hacer presentaciones orales. ▪ Hacer videos explicativos. ▪ Hacer exposiciones **Aprendiz multisensorial:** ▪ Señalar la contestación a una computadora o a una persona. ▪ Utilizar manipulativos para representar su contestación. ▪ Hacer presentaciones orales y escritas. ▪ Hacer dramas donde represente lo aprendido. ▪ Crear videos, canciones, carteles, infografías para explicar el material. ▪ Utilizar un comunicador electrónico o manual.	hablar, escuchar música mientras trabaja, cantar. ▪ Permitir que realice las actividades en diferentes escenarios controlados por el adulto. Ejemplo el piso, la mesa del comedor y luego, un escritorio.	▪ Establecer mecanismos para recordatorios que le sean efectivos. ▪ Utilizar las recompensas al terminar sus tareas asignadas en el tiempo establecido. ▪ Establecer horarios flexibles para completar las tareas. ▪ Proveer recesos entre tareas. ▪ Tener flexibilidad en cuando al mejor horario para completar las tareas. ▪ Comenzar con las tareas más fáciles y luego, pasar a las más complejas. ▪ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas.

HOJA DE DOCUMENTAR LOS ACOMODOS RAZONABLES UTILIZADOS AL TRABAJAR EL MÓDULO DIDÁCTICO

Nombre del estudiante: _______________________ **Número de SIE:________**
Materia del módulo: __________________________ **Grado:________________**

Estimada familia:

1. Utiliza la siguiente hoja para documentar los acomodos razonables que utiliza con tu hijo en el proceso de apoyo y seguimiento al estudio de este módulo. Favor de colocar una marca de cotejo [✓] en aquellos acomodos razonables que utilizó con su hijo para completar el módulo didáctico. Puede marcar todos los que aplique y añadir adicionales en la parte asignada para ello.

Acomodos de presentación	Acomodos de tiempo e itinerario
Aprendiz visual: ☐ Usar letra agrandada o equipos para agrandar como lupas, televisores y computadoras ☐ Uso de láminas, videos pictogramas. ☐ Utilizar claves visuales tales como uso de colores en las instrucciones, resaltadores (*highlighters*), subrayar palabras importantes. ☐ Demostrar lo que se espera que realice el estudiante y utilizar modelos o demostraciones. ☐ Hablar con claridad, pausado ☐ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante ☐ Añadir al material información complementaria **Aprendiz auditivo**: ☐ Leerle el material o utilizar aplicaciones que convierten el texto en formato audible. ☐ Leer en voz alta las instrucciones. ☐ Permitir que el estudiante se grabe mientras lee el material. ☐ Audiolibros ☐ Repetición de instrucciones ☐ Pedirle al estudiante que explique en sus propias palabras lo que tiene que hacer ☐ Utilizar el material grabado ☐ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante **Aprendiz multisensorial:** ☐ Presentar el material segmentado (en pedazos) ☐ Dividir la tarea en partes cortas ☐ Utilizar manipulativos	**Aprendiz visual:** ☐ Utilizar la computadora para que pueda escribir. ☐ Utilizar organizadores gráficos. ☐ Hacer dibujos que expliquen su contestación. ☐ Permitir el uso de láminas o dibujos para explicar sus contestaciones ☐ Permitir que el estudiante escriba lo que aprendió por medio de tarjetas, franjas, láminas, la computadora o un comunicador visual. ☐ Contestar en el folleto. **Aprendiz auditivo**: ☐ Grabar sus contestaciones ☐ Ofrecer sus contestaciones a un adulto que documentará por escrito lo mencionado. ☐ Hacer presentaciones orales. ☐ Hacer videos explicativos. ☐ Hacer exposiciones **Aprendiz multisensorial:** ☐ Señalar la contestación a una computadora o a una persona. ☐ Utilizar manipulativos para representar su contestación. ☐ Hacer presentaciones orales y escritas. ☐ Hacer dramas donde represente lo aprendido. ☐ Crear videos, canciones, carteles, infografías para explicar el material. ☐ Utilizar un comunicador electrónico o manual.

<table>
<tr><th>Acomodos de presentación</th><th>Acomodos de tiempo e itinerario</th></tr>
<tr><td>☐ Utilizar canciones
☐ Utilizar videos
☐ Presentar el material de forma activa, con materiales comunes.
☐ Permitirle al estudiante investigar sobre el tema que se trabajará
☐ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante</td><td></td></tr>
<tr><th>Acomodos de respuesta</th><th>Acomodos de ambiente y lugar</th></tr>
<tr><td>Aprendiz visual:
☐ Ambiente silencioso, estructurado, sin muchos distractores.
☐ Lugar ventilado, con buena iluminación.
☐ Utilizar escritorio o mesa cerca del adulto para que lo dirija.

Aprendiz auditivo:
☐ Ambiente donde pueda leer en voz alta o donde pueda escuchar el material sin interrumpir a otras personas.
☐ Lugar ventilado, con buena iluminación y donde se les permita el movimiento mientras repite en voz alta el material.

Aprendiz multisensorial:
☐ Ambiente se le permita moverse, hablar, escuchar música mientras trabaja, cantar.
☐ Permitir que realice las actividades en diferentes escenarios controlados por el adulto. Ejemplo el piso, la mesa del comedor y luego, un escritorio.</td><td>Aprendiz visual y auditivo:
☐ Preparar una agenda detalladas y con códigos de colores con lo que tienen que realizar.
☐ Reforzar el que termine las tareas asignadas en la agenda.
☐ Utilizar agendas de papel donde pueda marcar, escribir, colorear.
☐ Utilizar “post-it” para organizar su día.
☐ Comenzar con las clases más complejas y luego moverse a las sencillas.
☐ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas.

Aprendiz multisensorial:
☐ Asistir al estudiante a organizar su trabajo con agendas escritas o electrónicas.
☐ Establecer mecanismos para recordatorios que le sean efectivos.
☐ Utilizar las recompensas al terminar sus tareas asignadas en el tiempo establecido.
☐ Establecer horarios flexibles para completar las tareas.
☐ Proveer recesos entre tareas.
☐ Tener flexibilidad en cuando al mejor horario para completar las tareas.
☐ Comenzar con las tareas más fáciles y luego, pasar a las más complejas.
☐ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otros:
____
____
____
____
____
____
____
____</td></tr>
</table>

2. Si tu hijo es un candidato o un participante de los servicios para estudiantes aprendices del español como segundo idioma e inmigrantes considera las siguientes sugerencias de enseñanza:

- Proporcionar un modelo o demostraciones de respuestas escritas u orales requeridas o esperadas.
- Comprobar si hay comprensión: use preguntas que requieran respuestas de una sola palabra, apoyos y gestos.
- Hablar con claridad, de manera pausada.
- Evitar el uso de las expresiones coloquiales, complejas.
- Asegurar que los estudiantes tengan todos los materiales necesarios.
- Leer las instrucciones oralmente.
- Corroborar que los estudiantes entiendan las instrucciones.
- Incorporar visuales: gestos, accesorios, gráficos organizadores y tablas.
- Sentarse cerca o junto al estudiante durante el tiempo de estudio.
- Seguir rutinas predecibles para crear un ambiente de seguridad y estabilidad para el aprendizaje.
- Permitir el aprendizaje por descubrimiento, pero estar disponible para ofrecer instrucciones directas sobre cómo completar una tarea.
- Utilizar los organizadores gráficos para la relación de ideas, conceptos y textos.
- Permitir el uso del diccionario regular o ilustrado.
- Crear un glosario pictórico.
- Simplificar las instrucciones.
- Ofrecer apoyo en la realización de trabajos de investigación.
- Ofrecer los pasos a seguir en el desarrollo de párrafos y ensayos.
- Proveer libros o lecturas con conceptos similares, pero en un nivel más sencillo.
- Proveer un lector.
- Proveer ejemplos.
- Agrupar problemas similares (todas las sumas juntas), utilizar dibujos, láminas, o gráficas para apoyar la explicación de los conceptos, reducir la complejidad lingüística del problema, leer y explicar el problema o teoría verbalmente o descomponerlo en pasos cortos.
- Proveer objetos para el aprendizaje (concretizar el vocabulario o conceptos).
- Reducir la longitud y permitir más tiempo para las tareas escritas.
- Leer al estudiante los textos que tiene dificultad para entender.
- Aceptar todos los intentos de producción de voz sin corrección de errores.
- Permitir que los estudiantes sustituyan dibujos, imágenes o diagramas, gráficos, gráficos para una asignación escrita.
- Esbozar el material de lectura para el estudiante en su nivel de lectura, enfatizando las ideas principales.
- Reducir el número de problemas en una página.
- Proporcionar objetos manipulativos para que el estudiante utilice cuando resuelva problemas de matemáticas.

3. Si tu hijo es un estudiante dotado, es decir, que obtuvo 130 o más de cociente intelectual (CI) en una prueba psicométrica, su educación debe ser dirigida y desafiante. Deberán considerar las siguientes recomendaciones:

- Conocer las capacidades especiales del estudiante, sus intereses y estilos de aprendizaje.
- Realizar actividades motivadoras que les exijan pensar a niveles más sofisticados y explorar nuevos temas.
- Adaptar el currículo y profundizar.
- Evitar las repeticiones y las rutinas.
- Realizar tareas de escritura para desarrollar empatía y sensibilidad.
- Utilizar la investigación como estrategia de enseñanza.
- Promover la producción de ideas creativas.
- Permitirle que aprenda a su ritmo.
- Proveer mayor tiempo para completar las tareas, cuando lo requiera.
- Cuidar la alineación entre su educación y sus necesidades académicas y socioemocionales.